Tentamen TAOP07 Opt grk Y den 26/1-22:
kortfattade lösningar.

1\. a) $0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 = 0{,}5y_1 + 0{,}4y_2 + 0{,}3y_2$

$0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 = 0{,}5y_1 + 0{,}6y_2 + 0{,}7y_2$

b) $\min\ c^T x + \sum_{i=1}^{k} d_i y_i$

då $\begin{cases} Ax = \sum_{i=1}^{k} b_i y_i \\ \sum_{i=1}^{k} y_i = 1 \\ y_i = 0/1,\ i = 1, \ldots, k \\ x \geq 0 \end{cases}$

2\. a) Inför artificiella variabler $a_1, a_2 \geq 0$.

$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 + a_1 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + a_2 = 1 \end{cases}$

Finn min $w = a_1 + a_2 = 4 + 5x_2 - x_3 + 3x_4$.

bas	$-w$	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	värde	
$-w$	1	0	5	−1	3	0	0	−4	x_3 in
← a_1	0	2	−6	2	−4	1	0	3	a_1 ut
a_2	0	−2	1	−1	1	0	1	1	
$-w$	1	1	2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	
x_3	0	1	−3	1	−2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	
a_2	0	−1	−2	0	−1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	

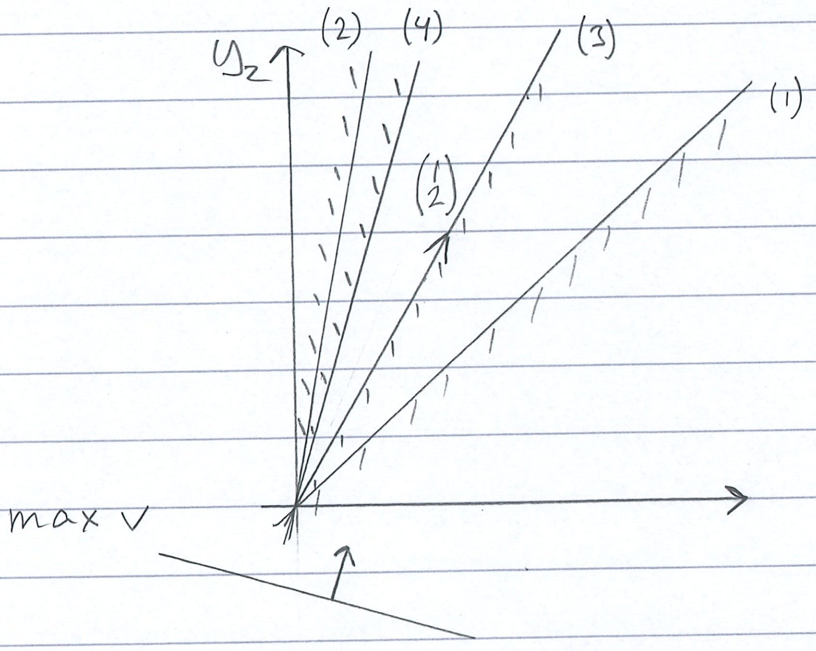
Optimum, med $w^* = \frac{5}{2} > 0$, vilket betyder att det givna systemet inte har någon tillåten lösning.

b) Primal:

$$
\begin{array}{ll|l}
 & \min z = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 & \\
\text{då} & \begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} & \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ \end{array}
\end{array}
$$

Dual: $\max v = 3y_1 + y_2$

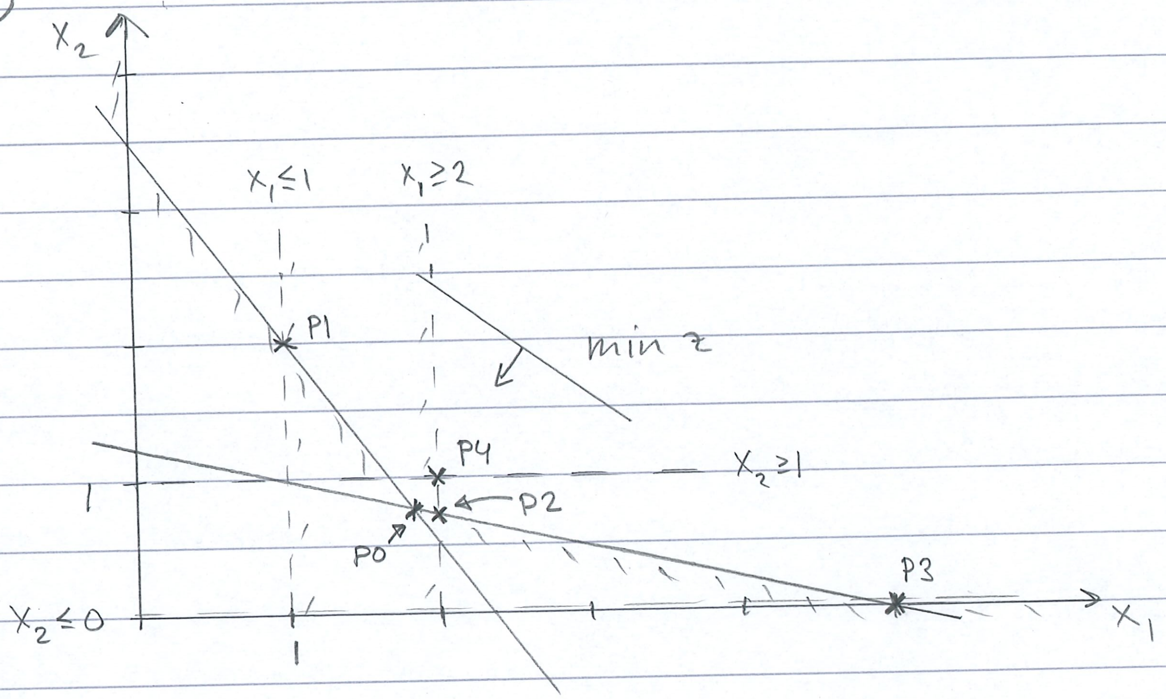
$$
\begin{array}{ll|l}
\text{då} & \begin{cases} 2y_1 - 2y_2 \leq 0 & (1) \\ -6y_1 + y_2 \leq 0 & (2) \\ 2y_1 - y_2 \leq 0 & (3) \\ -4y_1 + y_2 \leq 0 & (4) \end{cases} & \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}
\end{array}
$$

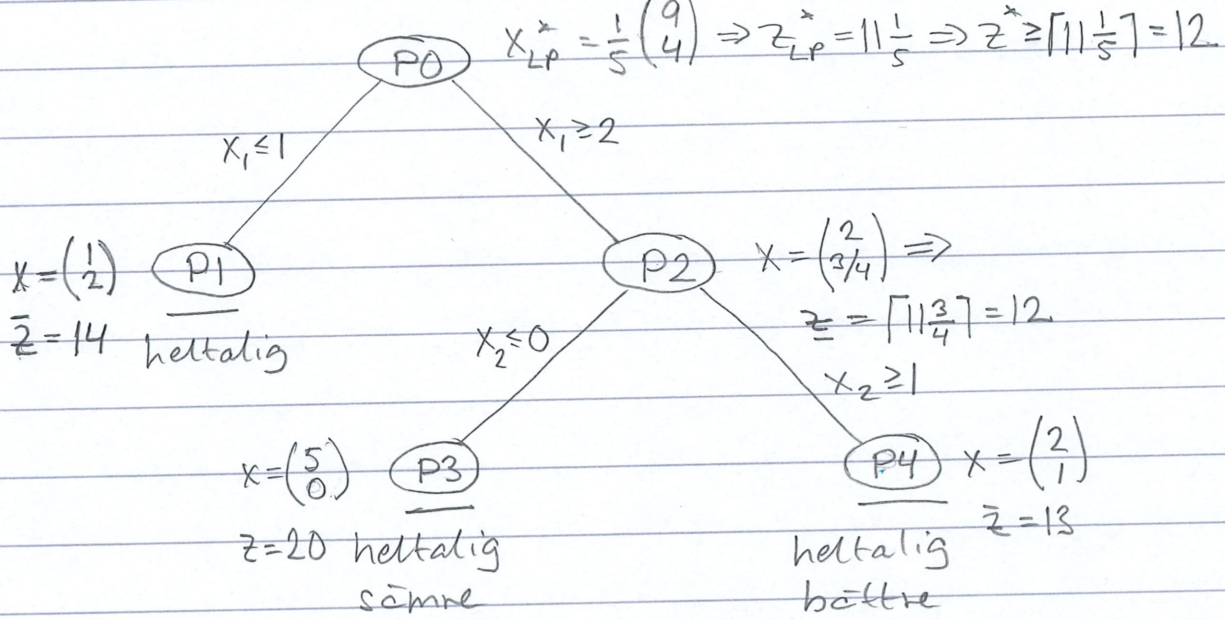


Optimum är obegränsat. Låt tex $\binom{y_1}{y_2} = t\binom{1}{2}$, $t \geq 0$. Dessa punkter är alla tillåtna, med $v = 3t + 2t = 5t \to +\infty$ då $t \to +\infty$.

Duala har obegränsat optimum $\Rightarrow$ primalen saknar tillåten lösning!

3. a)

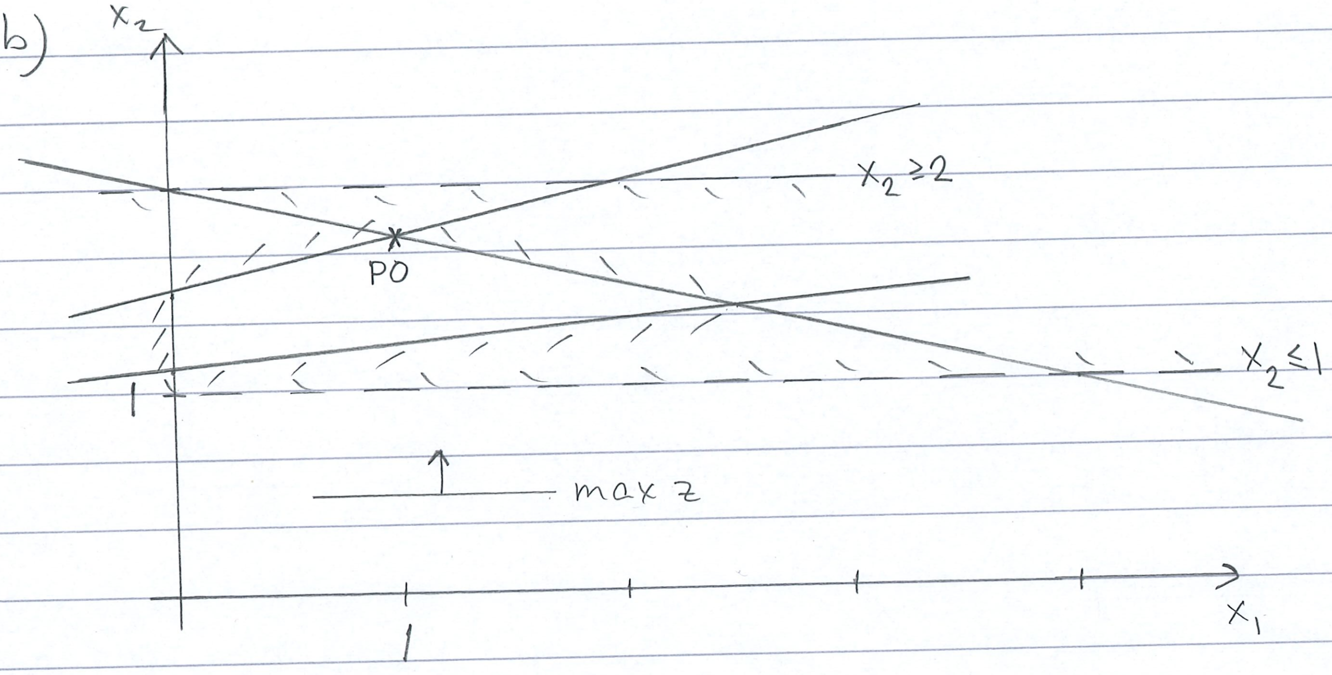


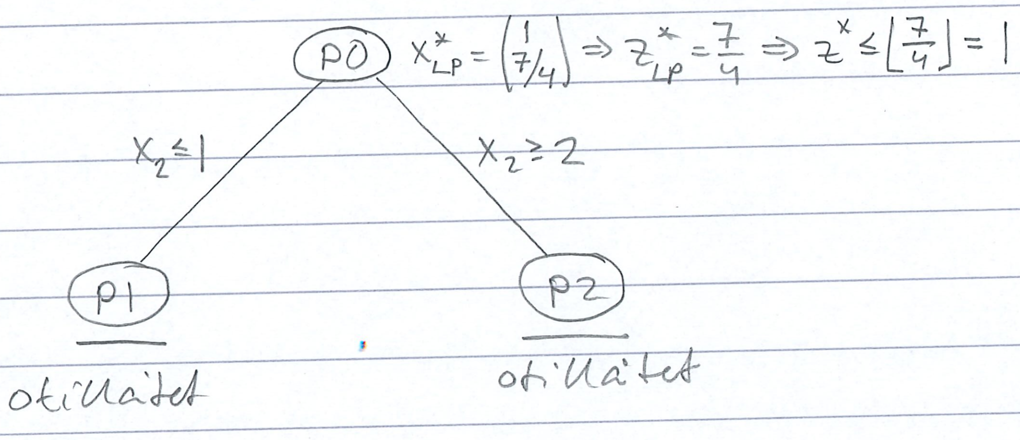


Avsökningsordning: P0, P1, P2, P3, P4

Optimum: $x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ med $z^* = 13$

b)





Problemet saknar tillåten heltalslösning.

4. a)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+12y+4 \\ 6y^2+12x+5 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 12 \\ 12 & 12y \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(x,y) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6x-\lambda & 12 \\ 12 & 12y-\lambda \end{vmatrix} = (6x-\lambda)(12y-\lambda) - 144 =$$

$$= \lambda^2 - (6x+12y)\lambda + 72xy - 144 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{6x+12y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6x+12y}{2}\right)^2 - 72xy + 144}$$

f är konvex då $\frac{6x+12y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6x+12y}{2}\right)^2 - 72xy + 144} \geq 0$,

vilket gäller då $\frac{6x+12y}{2} - \sqrt{\left(\frac{6x+12y}{2}\right)^2 - 72xy + 144} \geq 0$

(eftersom $\sqrt{\left(\frac{6x+12y}{2}\right)^2 - 72xy + 144} \geq 0$).

$$\frac{6x+12y}{2} - \sqrt{\left(\frac{6x+12y}{2}\right)^2 - 72xy + 144} \geq 0 \underset{\text{ty } \sqrt{\dots} \geq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\frac{6x+12y}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{6x+12y}{2}\right)^2 - 72xy + 144$$

$$\Leftrightarrow 72xy \geq 144 \Leftrightarrow xy \geq 2$$

Alltså: f konvex då $xy \geq 2$.

b) Mängden definieras av villkoren

$$\begin{cases} f_1(x) \leq y \\ y \leq f_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) - y \leq 0 \\ -f_2(x) + y \leq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \text{ konvex} \\ y \text{ linjär} \end{array}\right\} \Rightarrow f_1(x) - y \text{ konvex}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_2 \text{ konkav} \\ y \text{ linjär} \end{array}\right\} \Rightarrow -f_2(x) + y \text{ konvex}$$

Konvexa bivillkorsfunktioner och mindre-än-villkor $\Rightarrow$ konvex mängd!

5. a) $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1x_2 - 2 \\ \frac{1}{2}x_1^2 - 2 \end{pmatrix}$, $\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 - 2 \\ \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Låt $\bar{d} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $x(t) = \bar{x} + t\bar{d} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \geq 0$.

Låt $\varphi(t) = f(x(t)) = \frac{1}{2}(2-t)^2 \cdot 2 - 2(2-t) - 2\cdot 2 =$
$= (2-t)^2 - 2(2-t) - 4$

$\varphi'(t) = -2(2-t) + 2 = 2t - 2 \begin{cases} \leq 0 \text{ om } t \leq 1 \\ \geq 0 \text{ om } t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$

minimum fås för $t = 1$.

Nästa punkt: $x = x(1) = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix}$, $\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Newtonriktning: $d_N = -\nabla^2 f(\bar{x})^{-1} \nabla f(\bar{x}) =$

$= -\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\nabla f(\bar{x})^T d_N = (2, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \nless 0 \Rightarrow$ inte avtaganderiktning!

c) Längs linjen $x_2 = x_1$ är $f(x_1, x_2) = f(x_1, x_1) =$
$= \frac{1}{2}x_1^2 x_1 - 2x_1 - 2x_1 = \frac{1}{2}x_1^3 - 4x_1$, som inte är konvex $\Rightarrow f(x)$ är inte konvex på $\mathbb{R}^2$.

[Alternativt: för tex $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ fås $\det(\nabla^2 f(1,0) - \lambda I) = 0$ för $\lambda = \pm 1 \ngeq 0 \Rightarrow f(x)$ inte konvex på $\mathbb{R}^2$.]

6. Lagrange-relaxerat problem:

$$h(u) = \min_{x \in R^4} \left\{ \frac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + \frac{1}{2}(2x_3^2 + 4x_3x_4 + 3x_4^2) + \right.$$
$$\left. + u(34 - 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 5x_4) \right\}$$

För $u = 2$ fås:

$$h(2) = 68 + \min_{x_1, x_2} \left\{ \frac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 10x_1 - 4x_2 \right\} +$$
$$+ \min_{x_3, x_4} \left\{ \frac{1}{2}(2x_3^2 + 4x_3x_4 + 3x_4^2) - 8x_3 - 10x_4 \right\}$$

De två minimeringsproblemen är obegränsade och konvexa, varför stationära punkter utgör globala optima.

$$\nabla \left\{ \frac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 10x_1 - 4x_2 \right\} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - 10 \\ x_1 + x_2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \left\{ \frac{1}{2}(2x_3^2 + 4x_3x_4 + 3x_4^2) - 8x_3 - 10x_4 \right\} = \begin{pmatrix} 2x_3 + 2x_4 - 8 \\ 2x_3 + 3x_4 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alltså är $x(2) = (3, 1, 2, 2)^T$.

$$h(2) = 68 + \frac{1}{2}(3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1^2) - 10 \cdot 3 - 4 \cdot 1 +$$
$$+ \frac{1}{2}(2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2) - 8 \cdot 2 - 10 \cdot 2$$
$$= 33$$

$\Rightarrow f^* \geq 33$

Är $x(2)$ tillåten?

$34 - 5x_1(2) - 2x_2(2) - 4x_3(2) - 5x(2) =$
$= 34 - 5\cdot 3 - 2\cdot 1 - 4\cdot 2 - 5\cdot 2 = 34 - 35 = -1 \leq 0 \Rightarrow$ ja!

Dess målfunktionsvärde:

$\frac{1}{2}(3\cdot 3^2 + 2\cdot 3\cdot 1 + 1^2) + \frac{1}{2}(2\cdot 2^2 + 4\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2) = 35$

$\Rightarrow f^* \leq 35$

Alltså: $33 \leq f^* \leq 35$

7. a) Den enda 0/1-lösning som inte uppfyller $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ är $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Undersök om det givna systemet har någon tillåten lösning med $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 = x_3 = 1 \\ x_4 \geq x_1 \\ x_5 \geq x_1 \\ x_5 \geq x_2 \\ x_6 \geq x_2 \\ x_6 \geq x_3 \\ x_7 \geq x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 1 \Rightarrow$$

$4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 2x_7 = 23 \not\leq 21 \Rightarrow$

det finns inte någon sådan tillåten lösning.

Alltså är $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ en giltig olikhet.

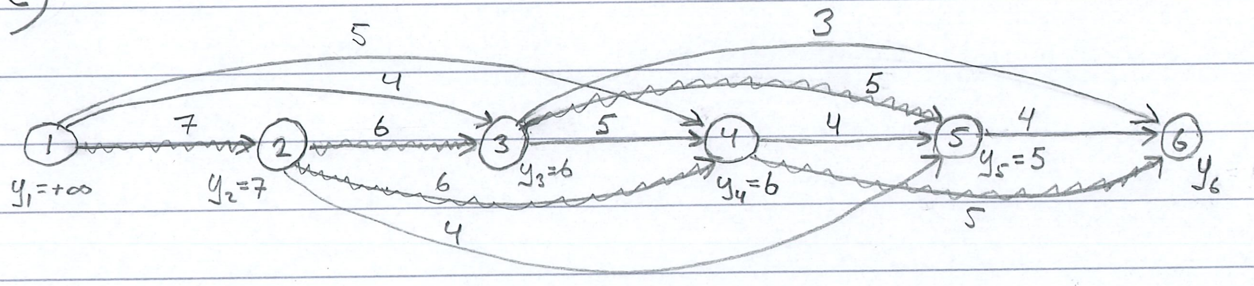
b)
$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{3} y_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 & (1) \\ y_i \geq 0, \quad i=1,2,3 & (2) \\ g_i(\bar{x}) \leq 0, \quad i=1,2,3 & (3) \\ y_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i=1,2,3 & (4) \end{cases}$$

(3) och (4) är uppfyllda.

$$(1) \Rightarrow y_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \geq 0 \\ y_2 = 1 \geq 0 \\ y_3 = -1 \ngeq 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} \text{ är } \underline{\text{inte}} \text{ en KKT-punkt.}$$

c)



Bellmans ekvationer:

$y_1 = +\infty$

$y_2 = \min\{+\infty, 7\} = 7 \quad p_2 = 1$ ok!

$y_3 = \max\{\min\{+\infty, 4\}, \min\{7,6\}\} = 6 \quad p_3 = 2$ ok!

$y_4 = \max\{\min\{+\infty, 5\}, \min\{7,6\}, \min\{6,5\}\} = 6 \quad p_4 = 2$

$y_5 = \max\{\min\{7,4\}, \min\{6,5\}, \min\{6,4\}\} = 5 \quad p_5 = 3$ ok!

$y_6 = \max\{\min\{6,3\}, \min\{6,5\}, \min\{5,4\}\} = 5 \quad p_6 = 4$ nix!

Båge (5,6) ingår <u>inte</u> i en optimal väg.