Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	9 juni 2020
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Allt utom programvaror och lösare.
	Det är *inte* tillåtet att kommunicera med andra personer under tentamen.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Sänd in dem elektroniskt enligt givna instruktioner.

Uppgift 1.

a) Antag att vi har V viktenheter av en råvara som innehåller p viktprocent av en speciell substans. Råvaran kan via en process separeras i tre ämnen som innehåller p_1, p_2 respektive p_3 viktprocent av den speciella substansen. Låt variablerna x_1, x_2 och x_3 beskriva de antal viktenheter av de tre ämnena som skapas. Teckna linjära villkor (ett eller flera) som beskriver de möjliga värdena på x_1, x_2 och x_3. **(1p)**

b) Ett företag tillverkar tre produkter. Låt mängderna som produceras betecknas med variablerna x_1, x_2 respektive x_3. Tillverkningen använder två råvaror som köps in. Låt mängderna inköpta råvaror betecknas med variablerna y_1 och y_2. Av de inköpta råvarorna måste 10% kasseras på grund av bristande kvalitet. Tillverkningen av en enhet av den första produkten kräver 2 enheter av den första råvaran och 2 enheter av den andra råvaran. Motsvarande användning av råvara för de andra två produkterna är 2 och 3 enheter respektive 3 och 4 enheter. Teckna linjära villkor (ett eller flera) som beskriver de möjliga värdena på x_1, x_2, x_3, y_1 och y_2. **(2p)**

Uppgift 2.

Använd simplexmetoden för att bestämma ett största möjliga värde på l och ett minsta möjliga värde på u sådana att $l \leq 8x_1 - 5x_2 + 10x_3 \leq u$ gäller för alla värden på $x_1, \ldots, x_5$ sådana att

$$\begin{cases} x_1 & & + & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 9 \\ & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 4 \\ x_1 & , x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0. \end{cases}$$

Starta med basvariablerna x_1 och x_2. **(3p)**

Uppgift 3.

Betrakta ett riktat acykliskt nätverk med 6 noder och bågdata enligt tabellen nedan.

	till				
från	2	3	4	5	6
1	3	4	–	–	–
2	–	2	5	7	–
3	–	–	2	7	–
4	–	–	–	1	5
5	–	–	–	–	2

a) Givet att bågdata beskriver kostnader, använd Bellmans ekvationer för att bestämma en *billigaste* väg från nod 1 till nod 6. **(1p)**

b) Givet att bågdata beskriver kostnader, använd en lämplig variation av Bellmans ekvationer för att bestämma en *dyraste* väg från nod 1 till nod 6. **(1p)**

c) Givet att bågdata beskriver kapaciteter, använd en lämplig variation av Bellmans ekvationer för att bestämma en väg av *maximal kapacitet* från nod 1 till nod 6. **(1p)**

Uppgift 4.

a) Betrakta kappsäcksproblemet

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
z^* = & \max & z = & 10x_1 & + & 12x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & \\
 & \text{då} & & 5x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & + & 10x_4 & \leq \; 23 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq \; 0 \text{ och heltal.}
\end{array}
$$

Finn optimum till dess LP-relaxation, *utan att använda simplexmetoden.*Vilken uppskattning av z^* fås? **(1p)**

b) Villkoret $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 4$ utgör en giltig olikhet för det tillåtna området i problemet i deluppgift a. Alltså gäller att

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
z^* = & \max & z = & 10x_1 & + & 12x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & \\
 & \text{då} & & 5x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & + & 10x_4 & \leq \; 23 \\
 & & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq \; 4 \\
 & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq \; 0 \text{ och heltal.}
\end{array}
$$

Finn optimum till LP-relaxation av detta problem genom att teckna det *duala problemet* och lösa detta *grafiskt*. Vilken uppskattning av z^* fås? **(2p)**

Uppgift 5.

Låt $f : R^n \to R$ samt låt $l_j, j = 1, \ldots, n$, och $u_j, j = 1, \ldots, n$, vara givna konstanter sådana $l_j < u_j, j = 1, \ldots, n$. Betrakta problemet

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{då} & l_j \le x_j \le u_j \quad , \quad j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

a) Teckna Karush-Kuhn-Tucker-villkoren för problemet. Definiera införda storheter. **(1p)**

b) Visa att Karush-Kuhn-Tucker-villkoren är uppfyllda om och endast om x är tillåten och

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \begin{cases} \ge 0 & om \quad x_j = l_j \\ = 0 & om \quad l_j < x_j < u_j \\ \le 0 & om \quad x_j = u_j \end{cases}$$

gäller för $j = 1, \ldots, n$. **(2p)**

Uppgift 6.

Betrakta det kvadratiska optimeringsproblemet

$$f^* = \min \tfrac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2)$$

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{då} & 14 & - & x_1 & - & 4x_2 & \le & 0 \\ & 6 & - & x_1 & - & x_2 & \le & 0. \end{array}$$

a) Avgör om problemet är konvext. **(1p)**

b) Lagrange-relaxera de två villkoren med multiplikatovärdena $y_1 = 3$ och $y_2 = 6$. Vilken eller vilka slutsatser om f^* leder de gjorda beräkningarna till? **(2p)**

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Givet det obegränsade optimeringsproblemet

$$\min_{x \in R^2} f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_2 - 2)^4 - (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 2)^2 + x_1 - x_2,$$

punkten $\bar{x} = (0, 0)^T$ och sökriktningen $\bar{d} = (1, 1)^T$. Den optimala steglängden i linjesökningsproblemet

$$\min_{t \geq 0} \ \varphi(t) = f(\bar{x} + t\ \bar{d})$$

är då $\bar{t} = 2$. **(1p)**

b) Betrakta problemet

$$\min_{x \in X} \ f(x)$$

där $X \subseteq R^n$ är konvex och $f : X \to R$ är konvex på X. Då gäller att om x^* och x^{**}, där $x^{**} \neq x^*$, *båda* är optimala och $0 < \lambda < 1$ så är även $\lambda x^* + (1 - \lambda)x^{**}$ optimal. **(1p)**

c) Låt

$$\begin{array}{rrcrcl}
v(b_1) = \min & 7x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & b_1 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\
& x_1 & + & 2x_2 & \geq & 11 \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0,
\end{array}$$

där b_1 är en reell prarameter. Låt $x^*(b_1)$ beteckna optimallösningen som funktion av b_1. Då gäller att $x^*(9) = (7, 2)^T$ och $v'(9) = 9$. **(1p)**