Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	26 mars 2021
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	Allt utom programvaror och lösare. Det är *inte* tillåtet att kommunicera med andra personer under tentamen.
Antal uppgifter:	7 Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du läser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Sänd in dem elektroniskt enligt givna instruktioner.

Uppgift 1.

Ett företag monterar fyra produkter (1, 2, 3 och 4) utifrån inköpta komponenter. Monteringen sker i tre steg (A, B och C). Monteringen av en enhet av en produkt kräver ett visst antal mantimmar i vart och ett av stegen. I varje steg finns ett givet antal mantimmar tillgängliga. Varje enhet av en produkt som monteras och säljs ger en viss vinst, och under en given tidsperiod har varje produkt en viss maximal efterfrågan. Man behöver dock inte uppfylla hela efterfrågan. Tabellen nedan ger numeriska värden för de beskrivna förutsättningarna.

	tidsåtgång per enhet				tillgängliga
	1	2	3	4	mantimmar
steg A	2	2	1	1	160
steg B	2	4	1	2	200
steg C	3	6	1	5	180
vinst per enhet	17	22	9	18	
maximal efterfrågan	50	60	85	70	

Det är möjligt att flytta högst 20 % av de tillgängliga mantimmarna i steg A till steg C, och det går även att flytta högst 30 % av de tillgängliga mantimmarna i steg B till steg C. Företaget vill finna en produktion och en eventuell omfördelning av mantimmarna sådana att den totala vinsten maximeras.

a) Formulera företagets frågeställning som ett *linjärt optimeringsproblem.* **(2p)**

b) Antag att efterfrågan på produkt 4 även kan tillgodoses med produkt 1, men att vinsten per enhet då blir bara 16 (istället för 17 eller 18). Hur ska modellen modifieras för att inkludera denna möjlighet? **(1p)**

Uppgift 2.

Använd två-fas-metoden för att lösa det linjära optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{rlrcrcl}
z^* = & \min \quad z = & 4x_1 & + & x_2 & & \\
 & & & & & & \\
 & \text{då} & x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \\
 & & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

(3p)

Uppgift 3.

Betrakta det linjära optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{rlrcrcrcrcll}
\max & z = & 7x_1 & + & 10x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & & & \\
 & & & & & & & & & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 24 & (1) \\
 & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & \leq & 17 & (2) \\
 & & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & \leq & 29 & (3) \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0. &
\end{array}
$$

Problemet har alternativa optimallösningar. Bland dessa finns en optimallösning där $x_1 > 0$ och $x_2 > 0$ gäller och som uppfyller villkoret (3) med strikt olikhet.

Använd LP-dualitet för att beräkna samtliga optimallösningar. **(3p)**

Uppgift 4.

Ett programvaruutvecklingsprojekt består av 14 aktiviteter (specifikation, implementering, integration, uttestning, etc). Varje aktivitet kräver en viss tid (veckor) och dess påbörjande kräver att vissa andra aktiviteter först avslutats. Aktiviteterna, deras (direkta) föregångare och deras tidsåtgång ges i tabellen nedan.

aktivitet	föregås av	tidsåtgång
a	-	4
b	a	6
c	b	8
d	a	16
e	c,d	8
f	d	4
g	b,f	2
h	e,g	8
i	a	24
j	b,f	7

Beskriv projektet med hjälp av ett acykliskt nätverk med aktiviteterna och dessas tidsåtgångar på bågarna. (Eventuellt behöver även blindaktiviteter användas.) Gör en topologisk numrering av noderna (dvs så att bågar går från lägre till högre nodnummer). Använd lämplig version av Bellmans ekvationer för att finna en dyraste väg i nätverket och den kortaste möjliga tidsåtgången för att slutföra *hela* projektet. Vilka aktiviteter får absolut *inte* försenas för att inte hela projektet ska försenas? **(3p)**

Uppgift 5.

a) Antag att ett linjärt heltalsproblem av maximeringstyp löses med trädsökning, som dock avbryts innan hela trädet avsökts. Trädsökningen görs med djup-först-sökning, där vänster gren avsöks först. Vid avbrottet har 13 delproblem skapats, varav 11 även lösts. Lösningsgången summeras i tabellen nedan.

delproblem	z_{LP}	LP-lösning	efterföljare (vänster, höger)
P0	29	fraktionell	P1, P2
P1	28	fraktionell	P3, P4
P3	22	fraktionell	P5, P6
P5	21	heltalig	kapas
P6	19	fraktionell	kapas
P4	z_{LP}^4	fraktionell	P7, P8
P7	19	fraktionell	kapas
P8	18	fraktionell	kapas
P2	27	fraktionell	P9, P10
P9	26	fraktionell	P11, P12
P11	23	heltalig	kapas
P12	ej löst	?	?
P10	ej löst	?	?

Vad kan vid avbrottet sägas om det optimala målfunktionsvärdet, z_{HP}^*?

Vad kan sägas om det LP-optimala målfunktionsvärdet i P4, z_{LP}^4? **(2p)**

b) Betrakta mängden av tillåtna lösningar till bivillkoren

$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 17 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 \leq 17 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 = 0/1. \end{cases}$$

Avgör om villkoret

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$$

är en giltig olikhet för denna mängd. **(1p)**

Uppgift 6.

a) Betrakta det konvexa obegränsade optimeringsproblemet

$$\min_{x \in R^2} f(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{4}x_2^4 + 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 8x_1 - 8x_2.$$

Antag att man gör *en* iteration med brantaste lutningsmetoden med exakt linjesökning från startpunkten $x^0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$, samt att sökriktningen normeras så att den får *längden ett*. Är då någon av steglängderna 1, $\sqrt{2}$ och 2 optimal? **(1p)**

b) Betrakta samma problem som i deluppgift a). Beräkna Newton-riktningen från $x^0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$. Avgör om den är en avtaganderiktning. **(1p)**

c) Betrakta det generella kvadratiska obegränsade optimeringsproblemet

$$\min_{x \in R^n} f(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx - q^{\mathrm{T}}x,$$

där $Q \in R^{n \times n}$ är symmetrisk och $q \in R^n$. Antag att problemet angrips med brantaste lutningsmetoden från en startpunkt $x^0 \in R^n$. Visa att om nästa iterationspunkt, x^1, är en stationär punkt för f (dvs om $\nabla f(x^1) = Qx^1 - q = 0$ gäller) så sammanfaller riktningen $x^1 - x^0$ med en egenvektor till Q. Vad blir motsvarande egenvärde? **(1p)**

Uppgift 7.

Avgör om vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Problemet

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & f(x) & = & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \\ \text{då} & & & x_1 x_2 & \leq & 3 \\ & x_1^2 & + & x_2^2 & \leq & 10 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

har en Karush-Kuhn-Tucker-punkt och ett lokalt maximum i $\bar{x} = (\sqrt{5}, 3/\sqrt{5})^{\mathrm{T}}$. **(1p)**

b) Funktionen $f : R^2 \to R$ med

$$f(x) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 18x_1 - 12x_2 + e^{x_1^2} \cdot e^{x_2^2} \cdot e^{x_1x_2}$$

är konvex på hela R^2. **(1p)**

c) Givet 0/1-problemet

$$\begin{array}{rlrcrcrcrcrcr} z^* = & \min & -17x_1 & - & 12x_2 & - & 12x_3 & - & 17x_4 & - & 7x_5 & & \\ \\ & \text{då} & 5x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & + & 3x_5 & \leq & 11 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & + & 2x_5 & \leq & 11 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & = & 0/1. \end{array}$$

Genom en Lagrange-relaxering av de två linjära villkoren med mutiplikatorer $u_1 = 2$ respektive $u_2 = 1$ så kan man dra slutsatsen att $-36 \leq z^* \leq -29$. **(1p)**