Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	26 mars 2022
Tid:	14.00–19.00
Hjälpmedel:	*Ett* A4-blad med *handskrivna* dubbelsidiga anteckningar.
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson 013-28 24 35

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du läser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1.

a) En producent av metallegeringar använder två typer av malm, M_1 och M_2, för att tillverka tre legeringar, l_1, l_2 och l_3. Malmerna innehåller två metaller, m_1 och m_2, som används i produktionen, samt olika restprodukter. Utbytet av metallerna m_1 och m_2 från malmerna M_1 och M_2, i viktandel, ges av tabellen nedan.

	metall	
malm	m_1	m_2
M_1	$0,2$	$0,1$
M_2	$0,1$	$0,3$

De tre legeringarna tillverkas genom att de två metallerna blandas i olika proportioner. Dessa proportioner ges i tabellen nedan, i viktandel.

	legering		
metall	l_1	l_2	l_3
m_1	$0,5$	$0,4$	$0,3$
m_2	$0,5$	$0,6$	$0,7$

Låt x_1 och x_2 vara mängderna av malmerna M_1 och M_2 som används, i ton. Låt y_1, y_2 och y_3 vara mängderna legeringar som tillverkas, i ton.

Formulera *linjära* villkor som säkerställer att den metall som utvinns ur malmen även används för att producera legeringar. **(2p)**

b) Betrakta optimeringsproblemet

$$
\begin{array}{llcl}
\min & c^T x & + & f(b) \\
\text{då} & Ax & = & b \\
 & b & \in & B \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
$$

där $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ med $f(b_i) = d_i$, $i = 1, \ldots k$. Problemet kan tolkas som ett linjärt optimeringsproblem där man kan välja mellan k stycken bivillkorshögerled, till olika kostnader.

Omformulera problemet till ett *linjärt blandat 0/1-problem.* **(1p)**

Uppgift 2.

a) Använd artificiella variabler och fas-1 för att avgöra om systemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 3 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

har en tillåten lösning. **(2p)**

b) Verifiera svaret i deluppgift **a** genom att införa en noll-målfunktion som ska minimeras och studera det duala problemet grafiskt. **(1p)**

Uppgift 3.

a) Lös heltalsproblemet

$$\begin{array}{rrcrcl} z^* = \min z = & 4x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{då} & x_1 & + & 4x_2 & \geq & 5 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \geq & 7 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \ \text{ och heltaliga} \end{array}$$

med trädsökning. Förgrena över den fraktionella variabel som har lägst index. Använd djup-först-sökning och börja med mindre-än-grenen. **(2p)**

b) Lös heltalsproblemet

$$\begin{array}{rrcrcl} z^* = \max z = & x_2 & & & & \\ \text{då} & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 8 \\ & -x_1 & + & 4x_2 & \leq & 6 \\ & -x_1 & + & 10x_2 & \geq & 11 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \ \text{ och heltaliga} \end{array}$$

med trädsökning. Använd samma förgrenings- och avsökningsstrategier som ovan. **(1p)**

Uppgift 4.

a) Låt funktionen $f : R^2 \to R$ ges av

$$f(x, y) = x^3 + 2y^3 + 12xy + 4x + 5y.$$

På vilken delmängd av R^2 är f konvex? **(2p)**

b) Låt $f_1 : R^n \to R$ vara konvex på R^n och låt $f_2 : R^n \to R$ vara konkav på R^n. Visa att mängden

$$\{(x, y) \in R^{n+1} \mid f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

är konvex. **(1p)**

Uppgift 5.

Givet följande obegränsade ickelinjära optimeringsproblem.

$$\min_{x \in R^2} f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 x_2 - 2x_1 - 2x_2$$

a) Utför *en* iteration med brantaste lutningsmetoden från punkten $\bar{x} = (2, 2)^T$. Använd exakt linjesökning. **(1p)**

b) Beräkna Newton-riktningen i punkten $\bar{x} = (2, 2)^T$. Är den en avtagande-riktning? **(1p)**

c) Avgör om funktionen f är konvex eller ej på R^2. **(1p)**

Uppgift 6.

Betrakta problemet

$$\begin{aligned} f^* = \min \quad & \tfrac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + \tfrac{1}{2}(2x_3^2 + 4x_3x_4 + 3x_4^2) \\ \text{då} \quad & 34 - 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 0. \end{aligned}$$

Lagrange-relaxera villkoret med multiplikatorvärdet $u = 2$ och beräkna en optimistisk skattning av f^*. Beräkna, om så är möjligt, även en pessimistisk skattning av f^*. **(3p)**

Uppgift 7.

Avgör för vart och ett av nedanstående påståenden huruvida det är sant eller falskt. Motivera noga!

a) Villkoret $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ är en giltig olikhet för de tillåtna lösningarna till systemet

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 2x_7 \leq 21 \\ x_i \geq x_j, \ (i,j) \in P, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 = 0/1 \end{cases}$$

där $P = \{(4,1), (5,1), (5,2), (6,2), (6,3), (7,3)\}$. **(1p)**

b) Ett olinjärt optimeringsproblem av minimeringstyp består av målfunktionen $f(x)$ och de tre villkoren $g_i(x) \leq 0$, $i = 1, 2, 3$. I en given punkt $\bar{x}$ gäller att $g_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, 2, 3$, samt att $\nabla g_1(\bar{x}) = (-1, 2, 2)^T, \nabla g_2(\bar{x}) = (3, -2, 0)^T$ och $\nabla g_3(\bar{x}) = (0, 1, 0)^T$. Vidare är $\nabla f(\bar{x}) = (-1, -1, -4,)^T$ Då är $\bar{x}$ en Karush-Kuhn-Tucker-punkt. **(1p)**

c) Betrakta problemet att finna en väg av maximal kapacitet från nod 1 till nod 6 i ett nätverk med bågkapaciteter enligt tabellen nedan.

	till				
från	2	3	4	5	6
1	7	4	5	-	-
2	–	6	6	4	–
3	–	–	5	5	3
4	–	–	–	4	5
5	–	–	–	–	4

En väg av maximal kapacitet ges då av bågarna (1,2), (2,3), (3,5) och (5,6). **(1p)**