TAOP14:
Optimeringslära grundkurs

Nils-Hassan Quttineh
Optimeringslära, MAI

LINKÖPINGS UNIVERSITET

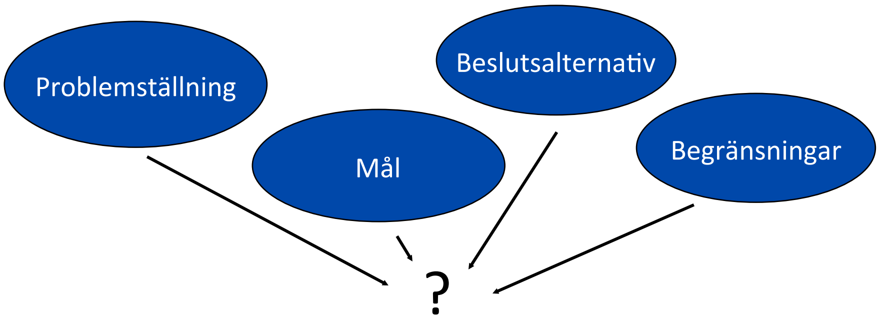
Föreläsning 1:
Kurspresentation och introduktion till optimeringslära

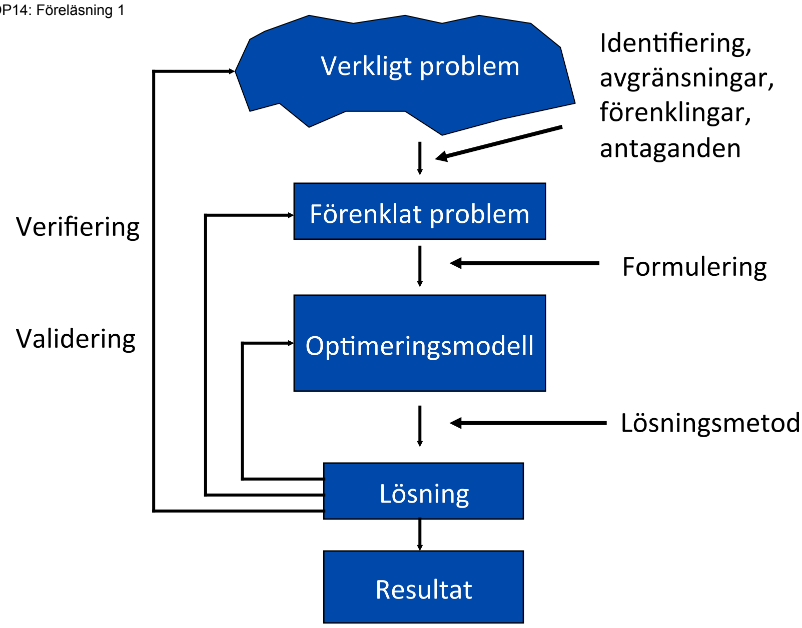
- Vad är optimeringslära och vad kan det användas till?
- Kursens innehåll och upplägg
- Grundläggande begrepp

LINKÖPINGS UNIVERSITET

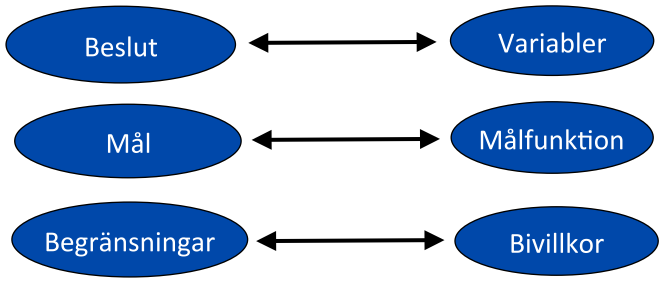
Vad är optimeringslära?

- Matematik som syftar till att finna bästa beslut / handlingsalternativ
- Kan användas för att beskriva, analysera och lösa komplexa problem inom teknik, ekonomi och samhälle





Optimeringsmodell



- Förutsättningar
  - Mål och begränsningar ska kunna uttryckas kvantitativt
  - Antalet beslutsalternativ är stort

Matematisk modell

- *x* är variablerna, de beslut som ska fattas
- *f(x)* är målfunktionen
- ***X*** representerar vilka lösningar som är tillåtna

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in \mathbb{X} \end{array}$$

Exempel:

$$\begin{array}{lrcl} \min & \multicolumn{3}{l}{f(x) = 2x_1 + 3x_2} \\ \text{då} & x_1 + 2x_2 & \geq & 5 \\ & 0 \leq x_1 & \leq & 2 \\ & 0 \leq x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

Tillämpningsområden

Exempel:

- Transport och distribution
  - lokalisering, ruttplanering, schemaläggning
- Bemanningsplanering
  - Tillordning, schemaläggning
- Telekommunikation
  - Planering av nya/utbyggnad av telenät
- Konstruktion
  - strukturoptimering, packning och kapning
- Finans
  - optimal aktieportfölj

Forskningsprojekt

Exempel på aktuella projekt på Optimeringslära, MAI:

- Schemaläggning av avioniksystem, många komponenter som måste dela information med varandra.
- Portföljvalsoptimering, komponera en aktieportfölj där man balanserar förväntad avkastning mot risk.
- Ruttplanering för snöröjning, planera vilka fordon som behövs och vilka gator dom ska röja (och i vilken ordning).
- Optimering av brachyterapi, förbättring av stråldosplaner med avseende på tumördöd och risk för biverkningar.
- Produktionsplanering inom processindustrin.

Vad krävs …

… för att gå från verkligt problem till resultat?

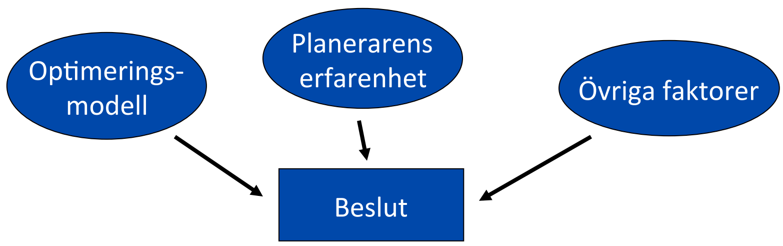
- Förståelse för tillämpningen
- Förmåga att strukturera problemställningen
- Välja lösningsmetod
- Lösa problemet:
  - Använda färdig programvara?
  - Programmera själv?

Ämneskunskap – matematik – programmering

Denna kurs

Optimeringens roll

- Strukturera / förstå problemet
- Matematiska modeller har optimala lösningar – verkligheten är mer nyanserad
- Vanligt syfte:
  - Ge riktlinjer eller förslag
  - Generera alternativa förslag under olika förutsättningar



Förutsättningar för optimering

Förr:

- Svårt att hitta data
- Allt / mycket programmering från grunden
- Långsamma datorer

Nutid (90-talet →):

- Data tillgängligt och strukturerat
- Programvaror
  - Mer tillgängliga och användarvänliga
  - Modelleringsspråk gör modellering enklare
- Snabba datorer och bra algoritmer

Val av lösningsmetod

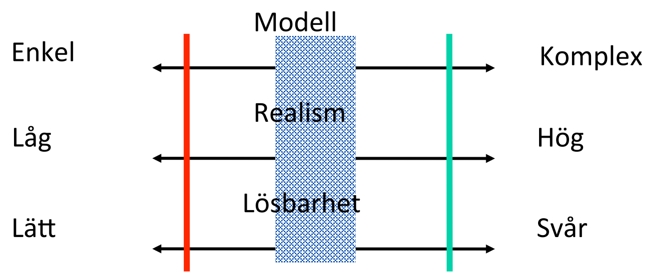
Faktorer som påverkar:

- Variabeltyp: Kontinuerliga / diskreta/binära
- Problemtyp: Linjära / ickelinjära samband
- Modellstorlek: Antal variabler / villkor
- Data: Deterministisk / stokastisk

Möjliga alternativ:

- Optimerande metod
- Heuristisk metod
- Simulering

Man får vad man betalar för ...



Produktionsplanering inom processindustrin

[Perstorps anläggning i Stenungsund]

Optimering, processindustrin

- Målfunktion
  - Maximera intäkter:
    - Försäljning till kunder
  - Minimera kostnaden för:
    - Produktion
    - Lagerhållning
    - Transporter (både mellan fabriker och till kund)
    - Ej uppfylld efterfrågan

Optimering, processindustrin

- Bivillkor
  - Produktionskapaciteter
  - Tillgodose kundernas efterfrågan
  - Beroenden mellan produkter
  - Begränsad lagerkapacitet
  - Lagerbalans:
    lager + nyproducerat - försäljning = nytt lager

Kursmål

- Identifiera tillämpningsområden
- Identifiera olika optimeringsproblem

- Förklara syftet med ett optimeringsproblem
- Modellera optimeringsproblem matematiskt

- Redogöra för olika optimeringsalgoritmer och sammanfatta principerna bakom algoritmerna
- Välja metod eller lösning för ett optimeringsproblem
- Använda en algoritm för att lösa ett optimeringsproblem
- Använda programvara för att lösa ett optimeringsproblem

- Redogöra för grundläggande optimeringsteori

Kursens innehåll

- Linjärprogrammering (LP)
  - formulering av LP-problem
  - simplexmetoden
  - dualitet
  - känslighetsanalys

- Icke-linjär programmering (ILP)
  - konvexitet
  - obegränsad optimering, sökmetoder
  - begränsad optimering, Frank-Wolfe metoden
  - Lagrangedualitet, Lagrangerelaxation

Kursens upplägg

- Föreläsningar, 10 st
- Lektioner, 12 st
- Salslaborationer, 3 st
- Projektuppgift, 1 st

- Skriftlig tentamen (4.5 HP)
- Laborationsdelen (1.5 HP)

Lektionsgrupper

- Emmy Sjöholm: I2a
- Oleg Burdakov: I2b, I2f
- Olle Hynen Ulfsjöö: I2c, Ii2d
- Joel Kvick: I2e
- Nisse Quttineh: Ii2a, Ii2b

Laborationer

- Laborationsgrupper om högst 2 personer
- 3 schemalagda laborationer (lab1, lab2, lab3)
- Efter lab 1: Projektuppgift
  - Formulering och lösning av ett LP-problem
  - Individuella uppdragsbeskrivningar
  - Skriftlig rapport samt muntlig avstämning

- Laborationsinformation delas ut på lektion
- Laborationslistor finns att fylla i på lektion
- Labbarna 4h långa (gott om tid)

Kursinformation

- Böcker:
  - Lärobok: Lundgren m.fl. *Optimeringslära* (2008)
  - Henningsson m.fl. *Optimeringslära – Övningsbok*
  - Används även i fortsättningskursen.

- Kurshemsida
  - `http://courses.mai.liu.se/GU/TAOP14/`
  - På Kursplatsen LISAM:
    Kursinformation; laborationsinformation;
    laborationsfiler; status på laborationer; ...
  - Registrera er för att få tillgång till kurssidan!!

LISAM

- Hur kommer man in i Lisam?
  - Man kommer in i Lisam med sitt LiU-id.
  - Logga in på webbadressen: `lisam.liu.se`
  - Det finns även länkar hit från olika ställen på LiU-webben, t.ex. från Studentportalen.
- Vad behöver man göra första gången i Lisam?
  - Den absolut första gången man loggar in i Lisam kommer systemet att i bakgrunden bygga upp den egna personliga sidan, vilket kan ta någon minut.
  - Utöver att vänta på detta behöver man inte göra några särskilda inställningar.

Utvärdering tidigare år (förra året)

- För två år sedan utökades labb 3 med en ny del, enligt önskemål från studenterna året innan. Den nya delen funkade bra, men labben i sin helhet blev något tung..
  - Se över vissa delar av Labb 3.
- Tentauppgifterna skiljer sig mycket från lektions-uppgifterna:
  - På lektionsplanen finns hänvisningar till ”typiska tentauppgifter” på motsvarande material.
- Vid exemplen på tavlan, skriv ner HELA frågan/problemet.
  - Finns nu på separata pdf-filer till varje föreläsning!

Nyheter

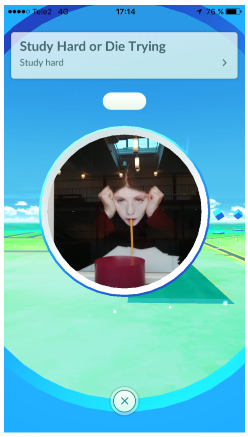
- Projektrapporten ska skrivas på engelska!
  - Nämnden för I-programmet vill få in mera inslag av engelska i utbildningen.
- En extra föreläsningar av Pamela Vang
  - Generellt om att skriva på engelska
  - Speciellt om rapportskrivning

- Sista gången kursen ges!!
  - Från och med våren 2017 ges kursen i ÅK 1 under vt2
  - Minskar från 6 hp till 4 hp
  - Se till att klara tentan :=)

Förväntningar

- Förkunskapskrav: Linjär algebra och analys
- Självstudier
  - Läs på inför föreläsningarna
  - Lektionstiden räcker oftast inte till för att lösa alla uppgifter. Krävs att ni lägger egen tid på att räkna.

- Kursvärderingar är bra, vi vill utveckla och förbättra våra kurser! Kräver dock feedback.
- Snälla fyll i KURT-utvärderingen i slutet av kursen. Förra året svarade endast 38% ..



Varför gör denna kurs att ni blir bättre civilingenjörer?

- Problemlösningsförmåga:
  Kursen ger övning i att angripa och lösa verkliga planeringsproblem på ett mycket strukturerat sätt.
- Datorn som verktyg:
  Övning i att använda datorn som verktyg vid lösande av problem, samt övning i att hantera olika programvaror.
- Matematiskt angreppssätt:
  Den matematik ni lärt er tidigare kommer till användning och sätts in i ett nytt sammanhang.

Tavelmarkör

- För att få en bra struktur på anteckningarna används symbolen

  T 4.2

  för att markera övergång till tavlan.

Nu börjar vi på riktigt !!

Linjära optimeringsproblem (LP-problem)

- Maximera (minimera) en linjär målfunktion
- Linjär bivillkorsmängd
- Undre (och övre) gräns för varje variabel

Summationsform

$$\max\ z = \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$\text{då} \quad \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in I$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J$$

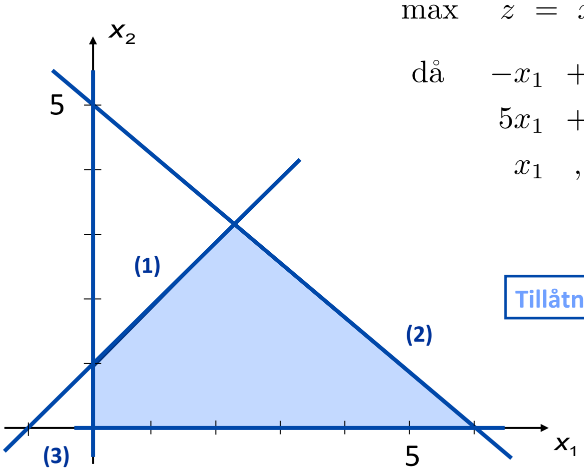
Matrisform

$$\max\ z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{då} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Grafisk lösning av LP-problem

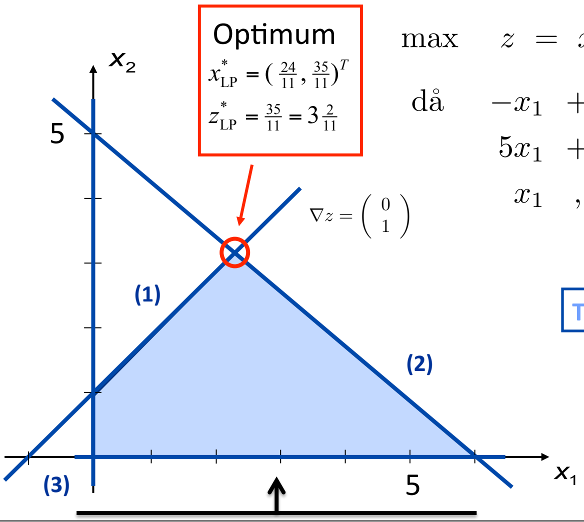


$$\max \quad z = x_2 \qquad \textbf{[målfunktion]}$$

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{då} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 & \textbf{(1)} \\ & 5x_1 & + & 6x_2 & \leq & 30 & \textbf{(2)} \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \textbf{(3)} \end{array}$$

Tillåtna området

Grafisk lösning av LP-problem

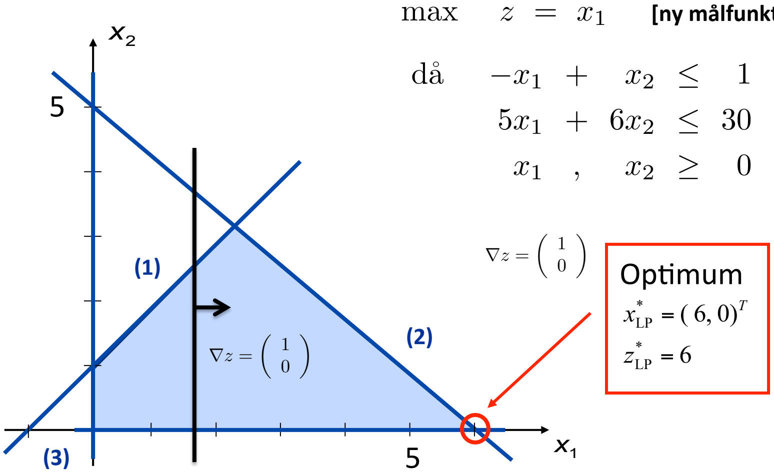


$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & z & = & x_2 & & & \textbf{[målfunktion]} \\ \text{då} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 & \textbf{(1)} \\ & 5x_1 & + & 6x_2 & \leq & 30 & \textbf{(2)} \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \textbf{(3)} \end{array}$$

Tillåtna området

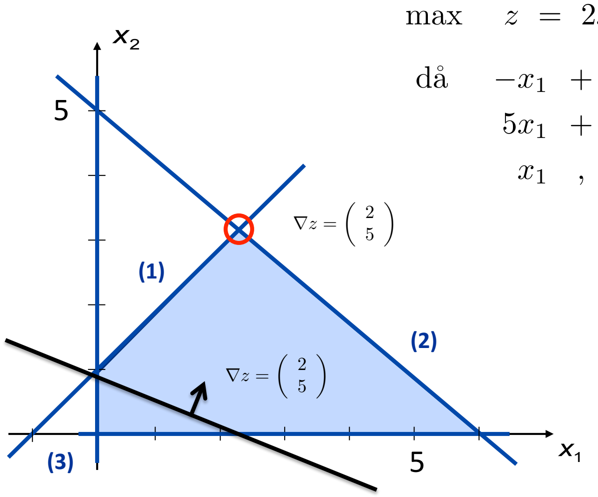
Grafisk lösning av LP-problem

$$\begin{array}{lrcrcrl} \max & z & = & x_1 & & & \textbf{[ny målfunktion]} \\ \text{då} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 & \textbf{(1)} \\ & 5x_1 & + & 6x_2 & \leq & 30 & \textbf{(2)} \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \textbf{(3)} \end{array}$$



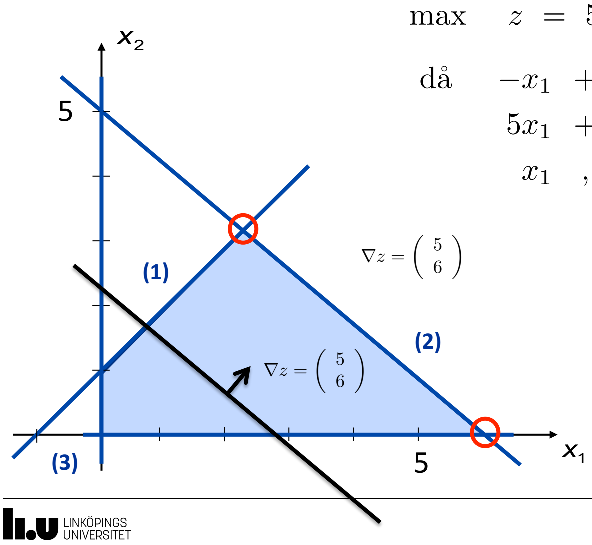
Grafisk lösning av LP-problem

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & z & = & \multicolumn{3}{l}{2x_1 + 5x_2} & \\
\text{då} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 & \textbf{(1)} \\
& 5x_1 & + & 6x_2 & \leq & 30 & \textbf{(2)} \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \textbf{(3)}
\end{array}
$$

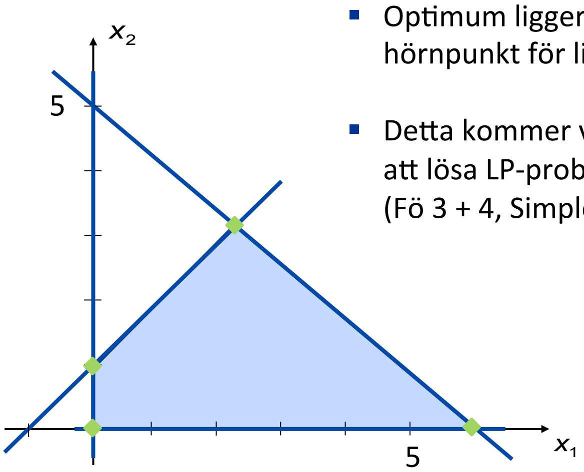


Grafisk lösning av LP-problem

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\max & z & = & \multicolumn{3}{l}{5x_1 + 6x_2} & \\
\text{då} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 & \textbf{(1)} \\
& 5x_1 & + & 6x_2 & \leq & 30 & \textbf{(2)} \\
& x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \textbf{(3)}
\end{array}
$$

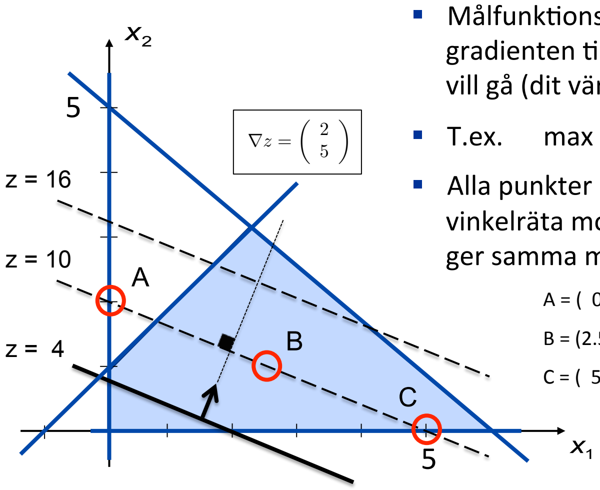


Grafisk lösning av LP-problem



- Optimum ligger alltid i (minst) en hörnpunkt för linjära problem
- Detta kommer vi att använda för att lösa LP-problem algebraiskt (Fö 3 + 4, Simplexalgoritmen)

Grafisk lösning av LP-problem



- Målfunktionskoefficienterna, gradienten till z, pekar ditåt man vill gå (dit värdet på z ökar mest)
- T.ex. max $z = 2x_1 + 5x_2$
- Alla punkter på linjer som är vinkelräta mot gradienten till z ger samma målfunktionsvärde:

A = (0, 2) => z = 2*0+ 5*2 = 10
B = (2.5, 1) => z = 2*2.5+ 5*1 = 10
C = (5, 0) => z = 2*5+ 5*0 = 10

Exempel: Produktionsplanering

- Produktion av två olika produkter.
- Maximera den totala vinsten.
- Resurstillgång vid de två tillverkningsavdelningarna:
  avd 1: 240h; avd 2: 140h

- Produkt 1
  - vinst/enhet: 30 kr
  - resursåtgång avd 1: 4h
  - resursåtgång avd 2: 2h
  - begränsad efterfrågan: 40 st
- Produkt 2
  - vinst/enhet: 20 kr
  - resursåtgång avd 1: 3h
  - resursåtgång avd 2: 2h

T 1.1

Modellformulering

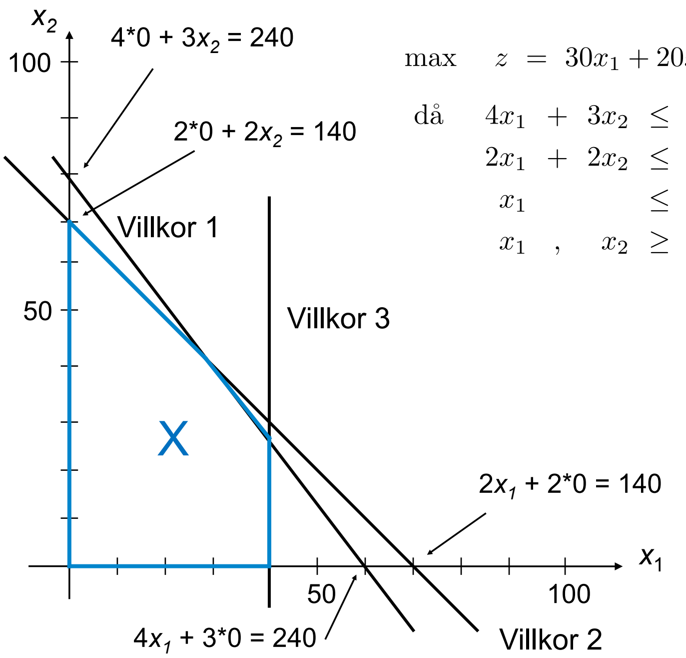
Variabeldefinition:

x_i = antalet tillverkade av produkt i, i = 1, 2

Matematisk modell:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & z & = & 30x_1 + 20x_2 \\
\text{då} & 4x_1 + 3x_2 & \leq & 240 \\
& 2x_1 + 2x_2 & \leq & 140 \\
& x_1 & \leq & 40 \\
& x_1 \;,\; x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

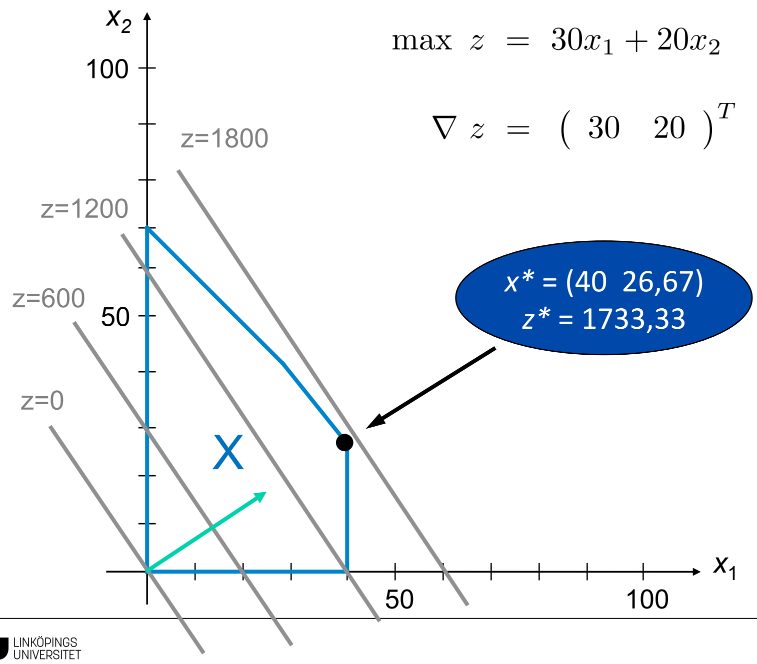
[målfunktion]
[resurs, avd. 1]
[resurs, avd. 2]
[maxproduktion]
[variabelbegränsningar]



$$
\begin{array}{llcrcrcr}
\max & z & = & 30x_1 + 20x_2 & & & & \\
\text{då} & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 240 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 140 \\
 & x_1 & & & \leq & 40 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$\max\ z = 30x_1 + 20x_2$$

$$\nabla z = \begin{pmatrix} 30 & 20 \end{pmatrix}^T$$



LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matrisform

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & z & = & 30x_1 + 20x_2 \\
\text{då} & 4x_1 + 3x_2 & \leq & 240 \\
 & 2x_1 + 2x_2 & \leq & 140 \\
 & x_1 & \leq & 40 \\
 & x_1 \;,\; x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcl}
\max & z & = & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{då} & \mathbf{Ax} & \leq & \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} 30 & 20 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 240 \\ 140 \\ 40 \end{pmatrix}
$$

Summationsform

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & z & = & 30x_1 + 20x_2 \\
\text{då} & 4x_1 + 3x_2 & \leq & 240 \\
 & 2x_1 + 2x_2 & \leq & 140 \\
 & x_1 & \leq & 40 \\
 & x_1 \;,\; x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcll}
\max & z & = & \sum_{j \in J} c_j x_j & \\
\text{då} & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j & \leq & b_i, & i \in I \\
 & x_j & \geq & 0, & j \in J
\end{array}
$$

$c_1 = 30$, $c_2 = 20$

$a_{11} = 4$, $a_{12} = 3$
$a_{21} = 2$, $a_{22} = 2$
$a_{31} = 1$, $a_{32} = 0$

$b_1 = 240$
$b_2 = 140$
$b_3 = 40$

Exempel på typer av problem

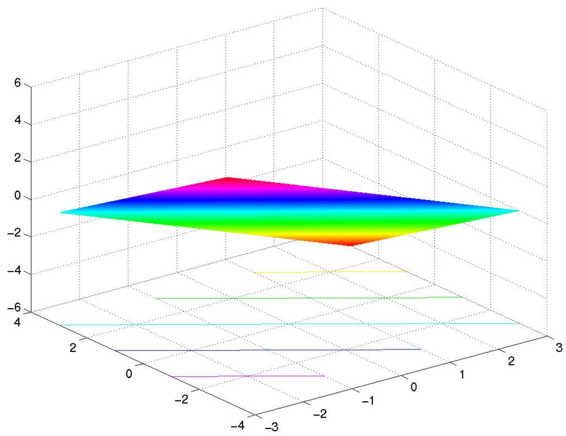
- Linjära problem (LP)
- Ickelinjära problem (ILP)

} Grundkursen

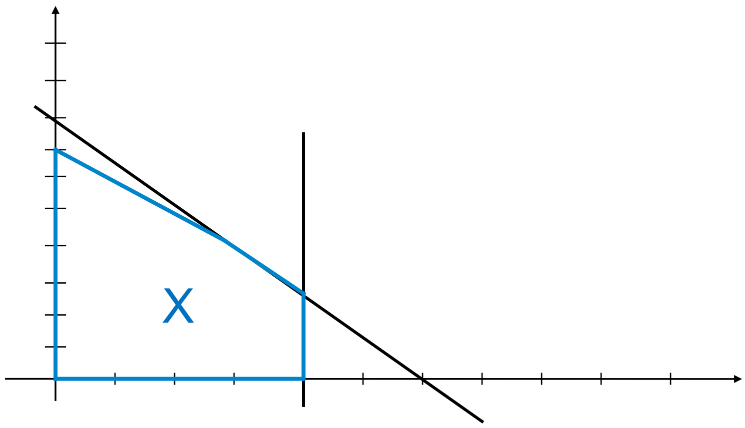
- Linjära heltalsproblem
- Nätverksproblem

} Fortsättningskursen

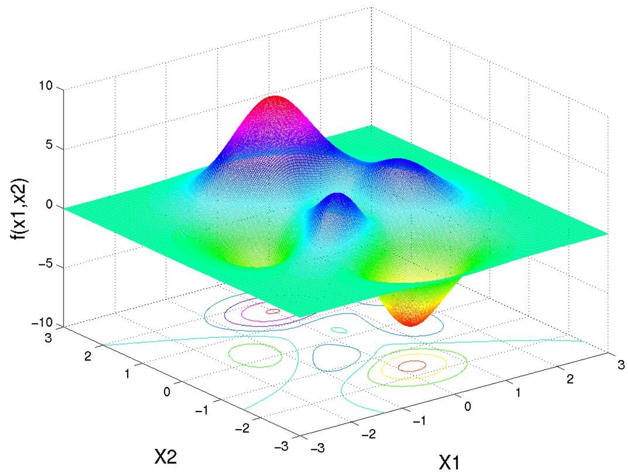
Linjär målfunktion



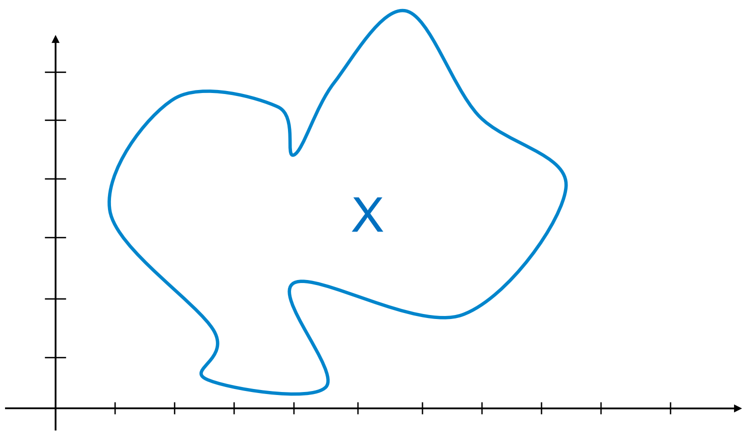
Linjärt tillåtet område



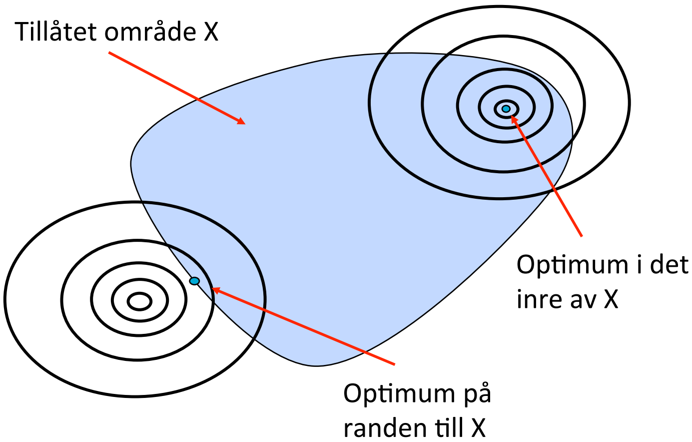
Ickelinjär målfunktion



Ickelinjärt tillåtet område

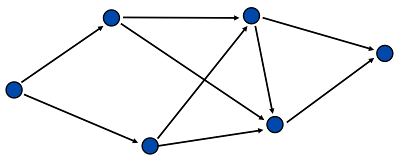


Ickelinjärt problem

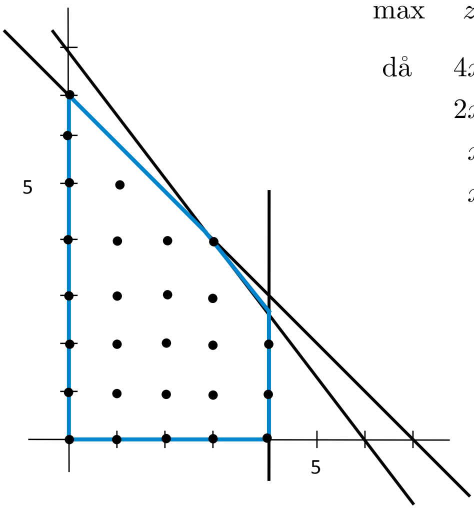


Nätverksproblem

- Har en speciell struktur som gör att logiken i problemet kan illustreras i form av ett nätverk med noder och bågar.
- Nätverksstrukturen utnyttjas vid lösningsförfarandet



Heltalsproblem



$$\begin{array}{llcrcrcl} \max & z & = & 30x_1 + 20x_2 & & & & \\ \text{då} & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 240 & & \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 140 & & \\ & x_1 & & & \leq & 40 & & \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0, & \text{heltal} \end{array}$$

Betydligt svårare att lösa än ett LP-problem!

Konvexitet

- Vad avgör om ett problem är ”lätt” eller ”svårt” att lösa?
- Olika typer av problem sägs ha olika komplexitet. Komplexiteten beror generellt av problemstrukturen och inte av den aktuella datan.
- Skilj på:
  Konvexa problem = lätta att lösa
  Icke-konvexa problem = svåra att lösa

Konvexitet

- LP-problem är ALLTID konvexa.
- ILP-problem är konvexa eller icke-konvexa

Definition 2.3

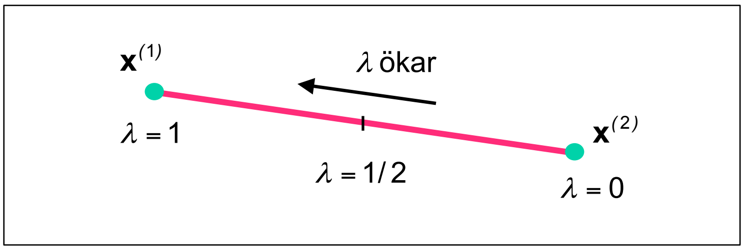
Problemet $\min \; f(x)$

$\text{då} \; x \in \mathbb{X}$

är ett konvext problem om *f*(x) är en konvex funktion och ***X*** är en konvex mängd.

Konvexkombination

En punkt y är en konvexkombination av två punkter $\mathbf{x}^{(1)}$ och $\mathbf{x}^{(2)}$ om $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}$ där $0 \le \lambda \le 1$.

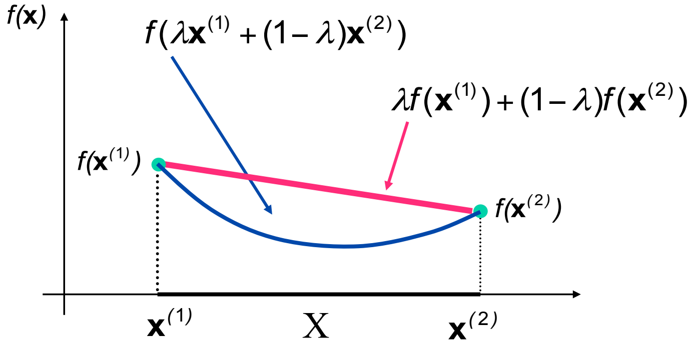


Alternativt: $\mathbf{y} = \lambda_1\mathbf{x}^{(1)} + \lambda_2\mathbf{x}^{(2)}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1, \lambda_2 \ge 0$

Konvex funktion, def. 2.4

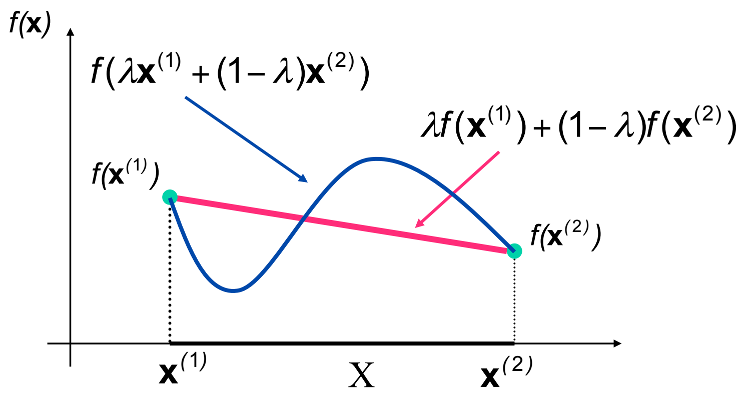
$f(\mathbf{x})$ är en konvex funktion på X om det för varje val av punkter $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in X$ och $0 \le \lambda \le 1$ gäller att

$$f(\lambda\mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}) \le \lambda f(\mathbf{x}^{(1)}) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}^{(2)})$$



Konvex funktion

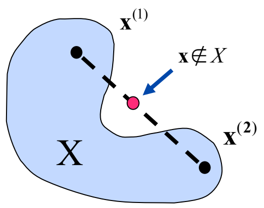
- Exempel på en funktion som inte är konvex:



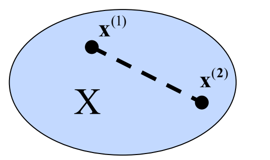
Konvex mängd

En mängd $X \subset R^n$ är en konvex mängd om det för varje val av punkter $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in X$ och $0 \le \lambda \le 1$ gäller att

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)} \in X$$



x ligger ej i mängden, ej konvex mängd



Oavsett val av $\mathbf{x}^{(1)}$ och $\mathbf{x}^{(2)}$ hamnar den streckade linjen i mängden X, så mängden är konvex

Konvexitet

- Mer om konvexitet när vi kommer till den icke-linjära delen av kursen.

Definition 2.3

Problemet $\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{då} & x \in \mathbb{X} \end{array}$

är ett konvext problem om *f*(x) är en konvex funktion och ***X*** är en konvex mängd.

Uppsummering Fö. 1

- Kursinformation
- Introduktion till ämnet Optimeringslära
  - Linjär Programmering, LP-problem
  - Grafisk lösning
  - Konvexitet
- Vill tipsa om **”Utförliga exempel”** som finns på Lisam
  - Notation:

    Förklaring av notation som ni kommer stöta på inom optimeringskurserna (bl.a. summatecken)
- Kommer upp fler dokument under kursens gång!