

TAOP14:
Optimeringslära grundkurs

Nils-Hassan Quttineh
Optimeringslära, MAI

 LINKÖPINGS
UNIVERSITET

TAOP14: Föreläsning 1

2

Föreläsning 1:
Kurspresentation och introduktion till
optimeringslära

- Vad är optimeringslära och vad kan det användas till?
- Kursens innehåll och upplägg
- Grundläggande begrepp

 LINKÖPINGS
UNIVERSITET

TAOP14: Föreläsning 1

3

Vad är optimeringslära?

- Matematik som syftar till att finna bästa beslut / handlingsalternativ
- Kan användas för att beskriva, analysera och lösa komplexa problem inom teknik, ekonomi och samhälle

Problemställning

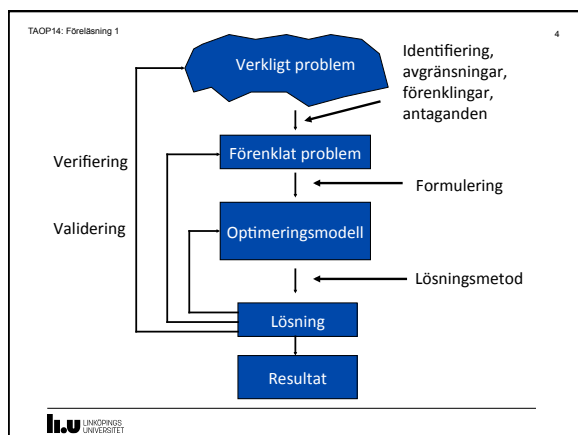
Mål

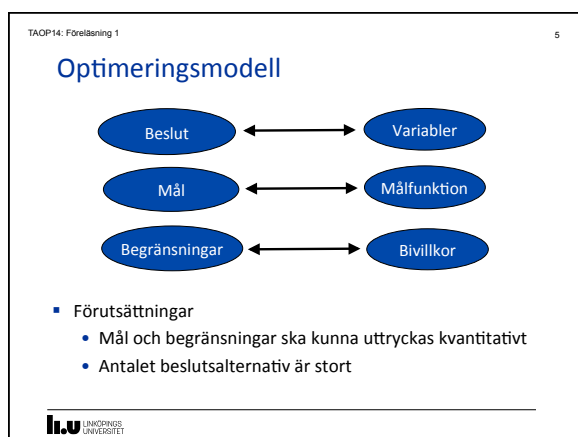
Beslutsalternativ

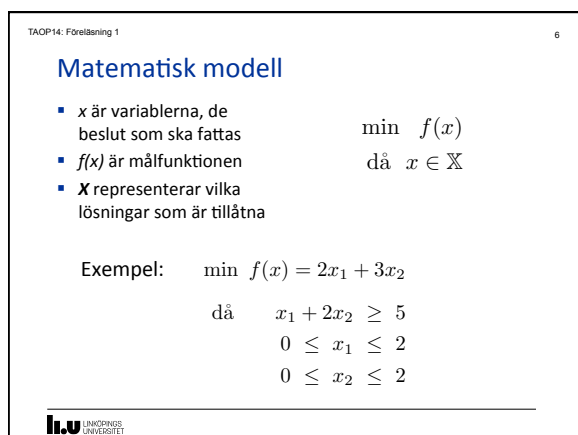
Begränsningar

?

 LINKÖPINGS
UNIVERSITET







Tillämpningsområden

Exempel:

- Transport och distribution
 - lokalisering, ruttplanering, schemaläggning
- Bemanningsplanering
 - Tillordning, schemaläggning
- Telekommunikation
 - Planering av nya/utbyggnad av telenät
- Konstruktion
 - strukturoptimering, packning och kapning
- Finans
 - optimal aktieportfölj

Forskningsprojekt

Exempel på aktuella projekt på Optimeringslära, MAI:

- Schemaläggning av avioniksystem, många komponenter som måste dela information med varandra.
- Portföljvalsoptimering, komponera en aktieportfölj där man balanserar förväntad avkastning mot risk.
- Ruttplanering för snöröjning, planera vilka fordon som behövs och vilka gator dom ska röja (och i vilken ordning).
- Optimering av brachyterapi, förbättring av stråldosplaner med avseende på tumördöd och risk för biverkningar.
- Produktionsplanering inom processindustrin.

Vad krävs ...

... för att gå från verkligt problem till resultat?

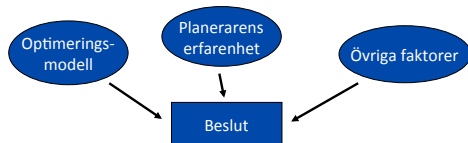
- Förståelse för tillämpningen
- Förmåga att strukturera problemställningen
- Välja lösningsmetod
- Lösa problemet:
 - Använda färdig programvara?
 - Programmera själv?

Ämneskunskap – matematik – programmering

Denna kurs

Optimeringens roll

- Strukturera / förstå problemet
- Matematiska modeller har optimala lösningar – verkligheten är mer nyanserad
- Vanligt syfte:
 - Ge riktlinjer eller förslag
 - Generera alternativa förslag under olika förutsättningar



Förutsättningar för optimering

Förr:

- Svårt att hitta data
- Allt / mycket programmering från grunden
- Långsamma datorer

Nutid (90-talet →):

- Data tillgängligt och strukturerat
- Programvaror
 - Mer tillgängliga och användarvänliga
 - Modelleringsspråk gör modellering enklare
- Snabba datorer och bra algoritmer

Val av lösningsmetod

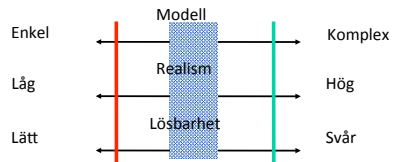
Faktorer som påverkar:

- | | |
|------------------|---------------------------------|
| ▪ Variabeltyp: | Kontinuerliga / diskreta/binära |
| ▪ Problemtyp: | Linjära / icke linjära samband |
| ▪ Modellstorlek: | Antal variabler / villkor |
| ▪ Data: | Deterministisk / stokastisk |

Möjliga alternativ:

- Optimerande metod
- Heuristisk metod
- Simulering

Man får vad man betalar för ...



Produktionsplanering inom processindustrin



[Perstorps anläggning i Stenungsund]

Optimering, processindustrin

- Målfunktion
 - Maximera intäkter:
 - Försäljning till kunder
 - Minimera kostnaden för:
 - Produktion
 - Lagerhållning
 - Transporter (både mellan fabriker och till kund)
 - Ej uppfylld efterfrågan

Optimering, processindustrin

- Bivillkor
 - Produktionskapaciteter
 - Tillgodose kundernas efterfrågan
- Beroenden mellan produkter
- Begränsad lagerkapacitet
- Lagerbalans:
 $\text{lager} + \text{nyproducerat} - \text{försäljning} = \text{nytt lager}$

Kursmål

- Identifiera tillämpningsområden
- Identifiera olika optimeringsproblem
- Förklara syftet med ett optimeringsproblem
- Modellera optimeringsproblem matematiskt
- Redogöra för olika optimeringsalgoritmer och sammanfatta principerna bakom algoritmerna
- Välja metod eller lösning för ett optimeringsproblem
- Använda en algoritm för att lösa ett optimeringsproblem
- Använda programvara för att lösa ett optimeringsproblem
- Redogöra för grundläggande optimeringsteori

Kursens innehåll

- Linjärprogrammering (LP)
 - formulering av LP-problem
 - simplexmetoden
 - dualitet
 - känslighetsanalys
- Icke-linjär programmering (ILP)
 - konvexitet
 - obegränsad optimering, sökmetoder
 - begränsad optimering, Frank-Wolfe metoden
 - Lagrangedualitet, Lagrangerelaxation

Kursens upplägg

- Föreläsningar, 10 st
- Lektioner, 12 st
- Sallaborationer, 3 st
- Projektuppgift, 1 st

- Skriftlig tentamen (4.5 HP)
- Laborationsdelen (1.5 HP)

Lektionsgrupper

- Emmy Sjöholm: I2a
- Oleg Burdakov: I2b, I2f
- Olle Hynen Ulfjöö: I2c, Ii2d
- Joel Kwick: I2e
- Nisse Quttineh: Ii2a, Ii2b

Laborationer

- Laborationsgrupper om högst 2 personer
- 3 schemalagda laborationer (lab1, lab2, lab3)
- Efter lab 1: Projektuppgift
 - Formulering och lösning av ett LP-problem
 - Individuella uppdragsbeskrivningar
 - Skriftlig rapport samt muntlig avstämning

- Laborationsinformation delas ut på lektion
- Laborationslistor finns att fylla i på lektion
- Labbarna 4h långa (gott om tid)

Kursinformation

- Böcker:
 - Lärobok: Lundgren m.fl. *Optimeringslära* (2008)
 - Henningsson m.fl. *Optimeringslära – Övningsbok*
 - Används även i fortsättningskursen.
- Kurshemsida
 - <http://courses.mai.liu.se/GU/TAOP14/>
 - På Kursplatsen LISAM: Kursinformation; laborationsinformation; laborationsfiler; status på laborationer; ...
 - Registrera er för att få tillgång till kurssidan!!

LISAM

- Hur kommer man in i Lisam?
 - Man kommer in i Lisam med sitt LiU-id.
 - Logga in på webbadressen: lisam.liu.se
 - Det finns även länkar hit från olika ställen på LiU-webben, t.ex. från Studentportalen.
- Vad behöver man göra första gången i Lisam?
 - Den absolut första gången man loggar in i Lisam kommer systemet att i bakgrunden bygga upp den egna personliga sidan, vilket kan ta någon minut.
 - Utöver att vänta på detta behöver man inte göra några särskilda inställningar.

Utvärdering tidigare år (förra året)

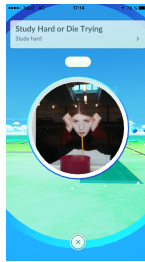
- För två år sedan utökades labb 3 med en ny del, enligt önskemål från studenterna året innan. Den nya delen funkade bra, men labben i sin helhet blev något tung..
 - Se över vissa delar av Labb 3.
- Tentauppgifterna skiljer sig mycket från lektionsuppgifterna:
 - På lektionsplanen finns hänvisningar till "typiska tentauppgifter" på motsvarande material.
- Vid exemplen på tavlan, skriv ner HELA frågan/problemet.
 - Finns nu på separata pdf-filer till varje föreläsning!

Nyheter

- Projektrapporten ska skrivas på engelska!
 - Nämnden för I-programmet vill få in mera inslag av engelska i utbildningen.
- En extra föreläsningar av Pamela Vang
 - Generellt om att skriva på engelska
 - Speciellt om rapportskrivning
- Sista gången kursen ges!!
 - Från och med våren 2017 ges kursen i ÅK 1 under vt2
 - Minskar från 6 hp till 4 hp
 - Se till att klara tentan :=)

Förväntningar

- Förkunskapskrav: Linjär algebra och analys
- Självstudier
 - Läs på inför föreläsningarna
 - Lektionstiden räcker oftast inte till för att lösa alla uppgifter. Krävs att ni lägger egen tid på att räkna.
- Kursvärderingar är bra, vi vill utveckla och förbättra våra kurser! Kräver dock feedback.
- Snälla fyll i KURT-utvärderingen i slutet av kursen. Förra året svarade endast 38% ..



Varför gör denna kurs att ni blir bättre civilingenjörer?

- Problemlösningsförmåga:
Kursen ger övning i att angripa och lösa verkliga planeringsproblem på ett mycket strukturerat sätt.
- Datorn som verktyg:
Övning i att använda datorn som verktyg vid lösande av problem, samt övning i att hantera olika programvaror.
- Matematiskt angreppssätt:
Den matematik ni lärt er tidigare kommer till användning och sätts in i ett nytt sammanhang.

Tavelmarkör

- För att få en bra struktur på anteckningarna används symbolen



för att markera övergång till tavlan.

Nu börjar vi på riktigt !!

Linjära optimeringsproblem (LP-problem)

- Maximera (minimera) en linjär målfunktion
- Linjär bivillkorsmängd
- Undre (och övre) gräns för varje variabel

Summationsform

$$\max z = \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$\text{då } \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in I$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J$$

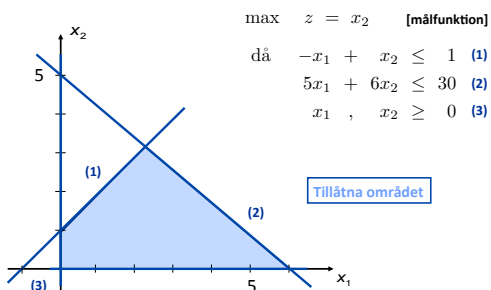
Matrisform

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

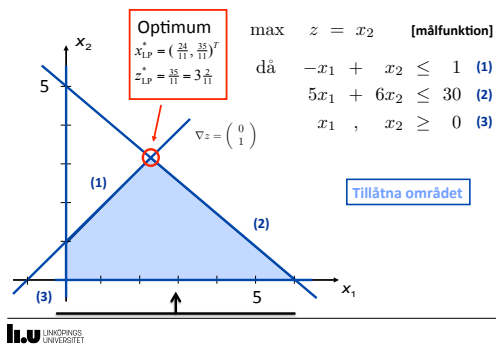
$$\text{då } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

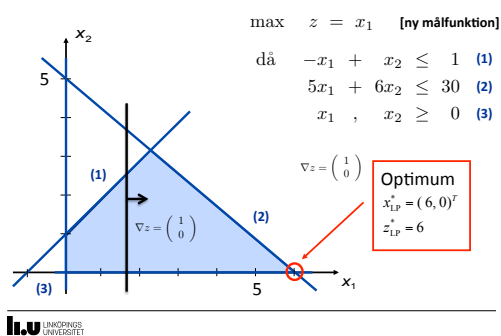
Grafisk lösning av LP-problem



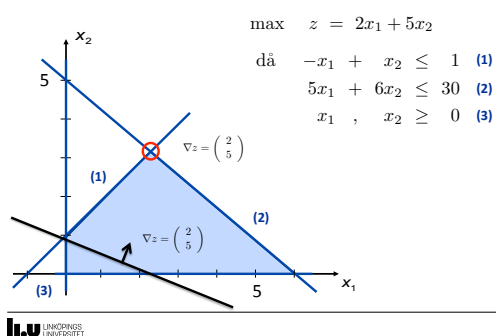
Grafisk lösning av LP-problem



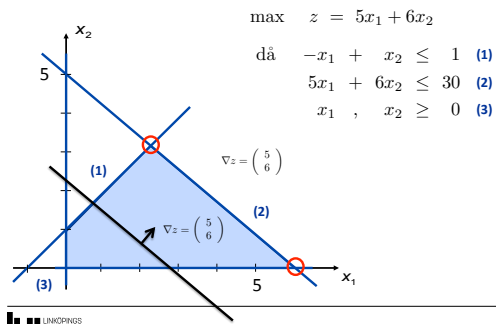
Grafisk lösning av LP-problem



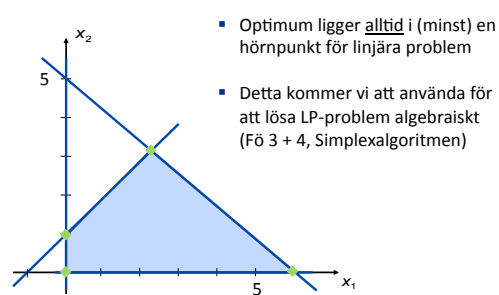
Grafisk lösning av LP-problem



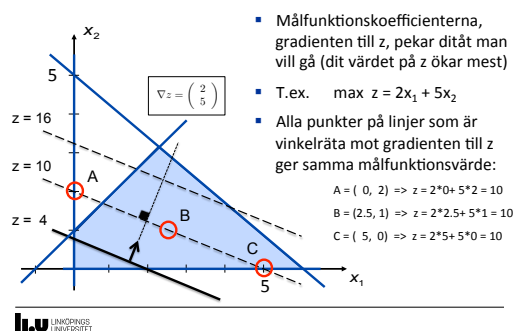
Grafisk lösning av LP-problem



Grafisk lösning av LP-problem



Grafisk lösning av LP-problem



Exempel: Produktionsplanering

- Produktion av två olika produkter.
- Maximera den totala vinsten.
- Resurstillgång vid de två tillverkningsavdelningarna:
avd 1: 240h; avd 2: 140h

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> Produkt 1 vinst/enhet: 30 kr resursåtgång avd 1: 4h resursåtgång avd 2: 2h begränsad efterfrågan: 40 st | <ul style="list-style-type: none"> Produkt 2 vinst/enhet: 20 kr resursåtgång avd 1: 3h resursåtgång avd 2: 2h |
|---|---|

T 1.1

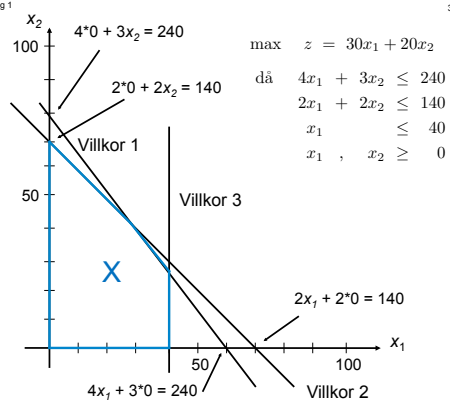
Modellformulering

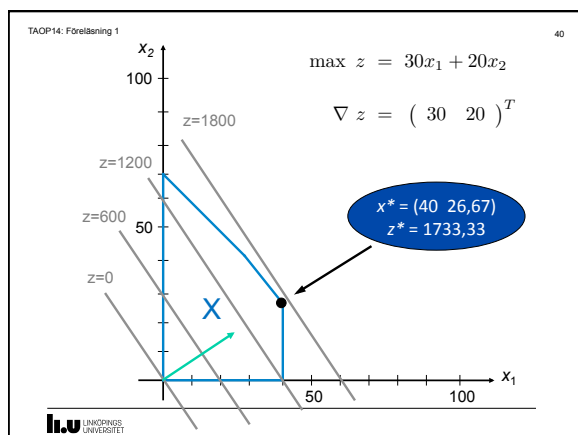
Variabeldefinition:

x_i = antalet tillverkade av produkt i , $i = 1, 2$

Matematisk modell:

$$\begin{array}{ll}
 \max & z = 30x_1 + 20x_2 & \text{[målfunktion]} \\
 \text{då} & 4x_1 + 3x_2 \leq 240 & \text{[resurs, avd. 1]} \\
 & 2x_1 + 2x_2 \leq 140 & \text{[resurs, avd. 2]} \\
 & x_1 \leq 40 & \text{[maxproduktion]} \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & \text{[variabelbegränsningar]}
 \end{array}$$





TACOP14: Föreläsning 1 41

Matrisform

$\max z = 30x_1 + 20x_2$ $\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$

då $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 240 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 140 \\ x_1 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ då $\begin{cases} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$

$\mathbf{c}^T = (30 \ 20)$ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 240 \\ 140 \\ 40 \end{pmatrix}$

LNU LINNÉUNIVERSITET

TACOP14: Föreläsning 1 42

Summationsform

$\max z = 30x_1 + 20x_2$ $\max z = \sum_{j \in J} c_j x_j$

då $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 240 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 140 \\ x_1 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ då $\begin{cases} \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, & i \in I \\ x_j \geq 0, & j \in J \end{cases}$

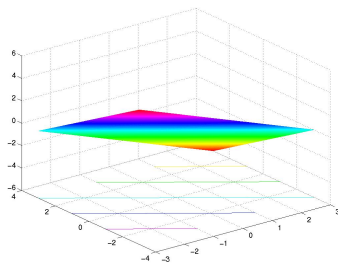
$c_1 = 30, c_2 = 20$ $a_{11} = 4, a_{12} = 3$ $b_1 = 240$
 $a_{21} = 2, a_{22} = 2$ $b_2 = 140$
 $a_{31} = 1, a_{32} = 0$ $b_3 = 40$

LNU LINNÉUNIVERSITET

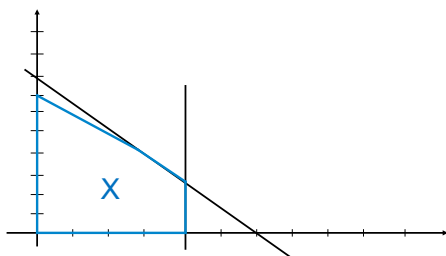
Exempel på typer av problem

- Linjära problem (LP)
 - Ickelinjära problem (ILP)
- } Grundkursen
- Linjära heltalsproblem
 - Nätverksproblem
- } Fortsättningskursen

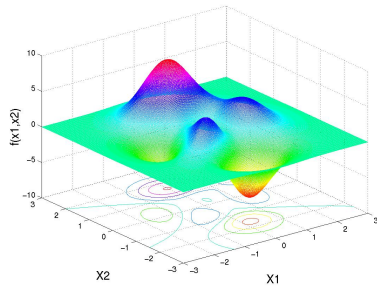
Linjär målfunktion



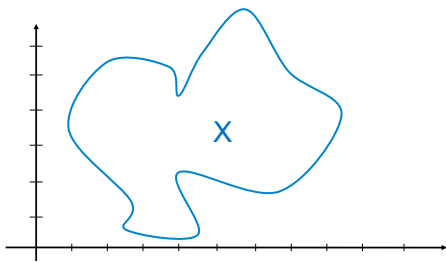
Linjärt tillåtet område



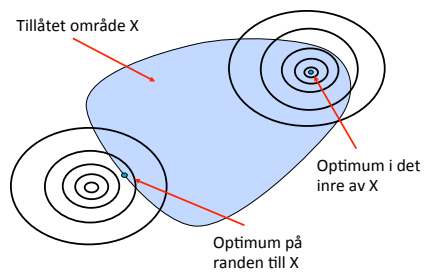
Ickelinjär målfunktion



Ickelinjärt tillåtet område

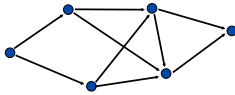


Ickelinjärt problem

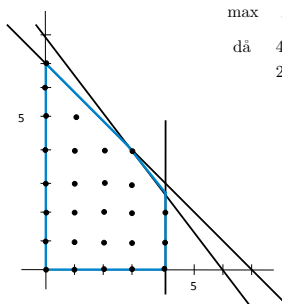


Nätverksproblem

- Har en speciell struktur som gör att logiken i problemet kan illustreras i form av ett nätverk med noder och bågar.
- Nätverksstrukturen utnyttjas vid lösningsförfarandet



Heltalsproblem



$$\max \quad z = 30x_1 + 20x_2$$

$$\text{då} \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 240$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 140$$

$$x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{ heltal}$$

Betydligt svårare att lösa än ett LP-problem!

Konvexitet

- Vad avgör om ett problem är "lätt" eller "svårt" att lösa?
- Olika typer av problem sägs ha olika komplexitet. Komplexiteten beror generellt av problemstrukturen och inte av den aktuella datan.
- Skilj på:

Konvexa problem	=	lätta att lösa
Icke-konvexa problem	=	svåra att lösa

Konvexitet

- LP-problem är ALLTID konvexa.
- ILP-problem är konvexa eller icke-konvexa

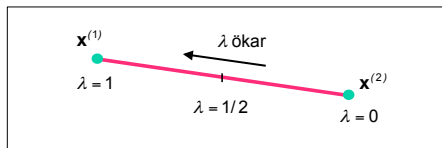
Definition 2.3

Problemet $\min f(x)$
då $x \in \mathbb{X}$

är ett konvext problem om
 $f(x)$ är en konvex funktion
och $\mathbb{X}$ är en konvex mängd.

Konvexkombination

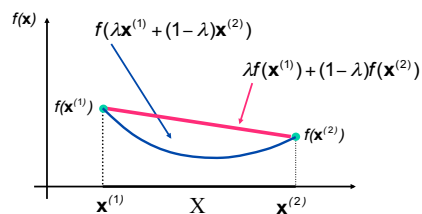
En punkt y är en konvexkombination av två punkter $\mathbf{x}^{(1)}$ och $\mathbf{x}^{(2)}$ om $y = \lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}$ där $0 \leq \lambda \leq 1$.



Alternativt: $y = \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{x}^{(2)}$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

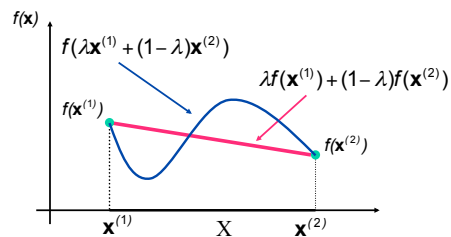
Konvex funktion, def. 2.4

$f(\mathbf{x})$ är en konvex funktion på X om det för varje val av punkter $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in X$ och $0 \leq \lambda \leq 1$ gäller att $f(\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}) \leq \lambda f(\mathbf{x}^{(1)}) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}^{(2)})$



Konvex funktion

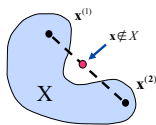
- Exempel på en funktion som inte är konvex:



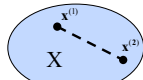
Konvex mängd

En mängd $X \subset \mathbb{R}^n$ är en konvex mängd om det för varje val av punkter $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in X$ och $0 \leq \lambda \leq 1$ gäller att

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda) \mathbf{x}^{(2)} \in X$$



$\mathbf{x}$ ligger ej i mängden,
ej konvex mängd



Oavsett val av $\mathbf{x}^{(1)}$ och $\mathbf{x}^{(2)}$
hamnar den streckade
linjen i mängden X , så
mängden är konvex

Konvexitet

- Mer om konvexitet när vi kommer till den icke-linjära delen av kursen.

Definition 2.3

Problemet $\min_{x \in \mathbb{X}} f(x)$

är ett konvext problem om
 $f(x)$ är en konvex funktion
och $\mathbb{X}$ är en konvex mängd.

Uppsummering Fö. 1

- Kursinformation
- Introduktion till ämnet Optimeringslära
 - Linjär Programmering, LP-problem
 - Grafisk lösning
 - Konvexitet
- Vill tipsa om **"Utförliga exempel"** som finns på Lisam
 - Notation:
Förklaring av notation som ni kommer stöta på inom optimeringskurserna (bl.a. summatecken)
- Kommer upp fler dokument under kursens gång!
