

# Optimum?

# Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

# Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning,  $x^*$ , till modellen.

# Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning,  $x^*$ , till modellen.

Nästan alltid: [Sökmeter](#):

# Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning,  $x^*$ , till modellen.

Nästan alltid: [Sökmeter](#):

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

# Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning,  $x^*$ , till modellen.

Nästan alltid: [Sökmeter](#):

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Upprepa, tills punkten är optimal.

# Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning,  $x^*$ , till modellen.

Nästan alltid: **Sökmeter:**

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Upprepa, tills punkten är optimal.

Metoderna baseras på **matematik**, och vi behöver exakta definitioner.

# Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning,  $x^*$ , till modellen.

Nästan alltid: **Sökmeter:**

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Upprepa, tills punkten är optimal.

Metoderna baseras på **matematik**, och vi behöver exakta definitioner.

Vad är optimum?



# Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning,  $x^*$ , till modellen.

Nästan alltid: **Sökmeter:**

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Upprepa, tills punkten är optimal.

Metoderna baseras på **matematik**, och vi behöver exakta definitioner.

Vad är optimum?

Punkten man står i verkar optimal. Är det det?

# Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning,  $x^*$ , till modellen.

Nästan alltid: **Sökmeter:**

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Upprepa, tills punkten är optimal.

Metoderna baseras på **matematik**, och vi behöver exakta definitioner.

Vad är optimum?

Punkten man står i verkar optimal. Är det det?

Vad kan man förvänta sig av olika metoder?

# Optimum?

# Optimum?

Globalt minimum: En punkt som är bäst. (rita)

## Definition

En punkt  $x^*$  är **globalt** minimum i  $X$  om  $f(x^*) \leq f(x)$  för alla  $x \in X$ .

# Optimum?

Globalt minimum: En punkt som är bäst. (rita)

## Definition

En punkt  $x^*$  är **globalt** minimum i  $X$  om  $f(x^*) \leq f(x)$  för alla  $x \in X$ .

Lokalt minimum: En punkt som är bäst för närsynta. (rita)

## Definition

En punkt  $x^*$  är **lokalt** minimum i  $X$  om  $f(x^*) \leq f(x)$  för alla  $x \in X$  som är nära  $x^*$ . (T.ex. för alla  $x \in X : \|x - x^*\| \leq \delta$ .)

# Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

## Definition

En mängd  $X$  är **konvex** om  $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$  för alla  $x^{(1)} \in X$ ,  $x^{(2)} \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

# Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

## Definition

En mängd  $X$  är **konvex** om  $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$  för alla  $x^{(1)} \in X$ ,  $x^{(2)} \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

# Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

## Definition

En mängd  $X$  är **konvex** om  $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$  för alla  $x^{(1)} \in X$ ,  $x^{(2)} \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.



# Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

## Definition

En mängd  $X$  är **konvex** om  $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$  för alla  $x^{(1)} \in X$ ,  $x^{(2)} \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.

Kombinerade mängder: Snittet av konvexa mängder är konvext. (rita)

## Sats

Om  $X_i$  är konvex för alla  $i$  så är  $X = \cap_i X_i$  konvex.

# Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

## Definition

En mängd  $X$  är **konvex** om  $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$  för alla  $x^{(1)} \in X$ ,  $x^{(2)} \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.

Kombinerade mängder: Snittet av konvexa mängder är konvext. (rita)

## Sats

Om  $X_i$  är konvex för alla  $i$  så är  $X = \cap_i X_i$  konvex.

Exempel: Flera halvrum. Flera linjära bivillkor.

# Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

## Definition

$\hat{x}$  är en **konvexkombination** av punkterna  $x^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, p$ , om  $\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}$ , där  $\sum_k \lambda_k = 1$  och  $\lambda_k \geq 0$  för alla  $k$ .

# Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

## Definition

$\hat{x}$  är en **konvexkombination** av punkterna  $x^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, p$ , om  $\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}$ , där  $\sum_k \lambda_k = 1$  och  $\lambda_k \geq 0$  för alla  $k$ .

Exempel: Mittpunkt.  $\lambda_k = 1/p$ .

# Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

## Definition

$\hat{x}$  är en **konvexkombination** av punkterna  $x^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, p$ , om

$$\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}, \text{ där } \sum_k \lambda_k = 1 \text{ och } \lambda_k \geq 0 \text{ för alla } k.$$

Exempel: Mittpunkt.  $\lambda_k = 1/p$ .

Extrempunkt: En punkt som **inte** är en konvexkombination av två andra tillåtna punkter. Hörn. (rita)

## Definition

$\hat{x}$  är en **extrempunkt** i  $X$  om  $\hat{x} = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}$ , där  $x^{(1)} \in X$ ,  $x^{(2)} \in X$  och  $0 < \lambda < 1$ , endast är möjligt om  $x^{(1)} = x^{(2)}$ .

# Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

## Definition

$\hat{x}$  är en **konvexkombination** av punkterna  $x^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, p$ , om

$$\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}, \text{ där } \sum_k \lambda_k = 1 \text{ och } \lambda_k \geq 0 \text{ för alla } k.$$

Exempel: Mittpunkt.  $\lambda_k = 1/p$ .

Extrempunkt: En punkt som **inte** är en konvexkombination av två andra tillåtna punkter. Hörn. (rita)

## Definition

$\hat{x}$  är en **extrempunkt** i  $X$  om  $\hat{x} = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}$ , där  $x^{(1)} \in X$ ,  $x^{(2)} \in X$  och  $0 < \lambda < 1$ , endast är möjligt om  $x^{(1)} = x^{(2)}$ .

Exempel: Origo (under bivillkoren  $x_i \geq 0$  för alla  $i$ ).

# Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

## Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

# Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

## Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel:  $x_1 + x_2 \leq 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .



# Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

## Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel:  $x_1 + x_2 \leq 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Exempel:  $x_1 + x_2 = 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

# Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

## Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel:  $x_1 + x_2 \leq 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Exempel:  $x_1 + x_2 = 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Exempel:  $Ax \leq b$ .

# Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

## Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel:  $x_1 + x_2 \leq 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Exempel:  $x_1 + x_2 = 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Exempel:  $Ax \leq b$ .

Exempel:  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$ .

# Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

## Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel:  $x_1 + x_2 \leq 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Exempel:  $x_1 + x_2 = 1$ ,  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Exempel:  $Ax \leq b$ .

Exempel:  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$ .

En polyeder har **ändligt** många extrempunkter.

# LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \quad \text{då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

# LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \text{ då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder. Målfunktionen är linjär.

# LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \text{ då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

# LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \quad \text{då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

Konstant lutning på målfunktionen:



# LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \quad \text{då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

Konstant lutning på målfunktionen: Gå så långt man får åt något håll.

# LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \quad \text{då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

Konstant lutning på målfunktionen: Gå så långt man får åt något håll.  $\Rightarrow$   
Hörn.

# LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \text{ då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

Konstant lutning på målfunktionen: Gå så långt man får åt något håll.  $\Rightarrow$  Hörn.

**Sats (Linjärprogrammeringens fundamentalsats)**

Om ett LP-problem har begränsad optimallösning, så antas den i (minst) en extrempunkt.

# Vårt första exempel

## Variabeldefinition:

$x_1$  = antal enheter Optimus som görs varje timme.

$x_2$  = antal enheter Rullmus som görs varje timme.

## Matematisk modell:

$$\begin{aligned}\max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 && (1) \quad (\text{knappar}) \\ \quad \quad x_1 &\leq 6 && (2) \quad (\text{optik}) \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 50 && (3) \quad (\text{monteringstid}) \\ \quad \quad x_1 &\geq 0 && (4) \\ \quad \quad \quad x_2 &\geq 0 && (5)\end{aligned}$$

# Baslösningar representerar extrempunkter

## Baslösningar representerar extrempunkter

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & (5) \end{array}$$

## Baslösningar representerar extrempunkter

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & (5) \end{array}$$

Inför slackvariabler.

## Baslösningar representerar extrempunkter

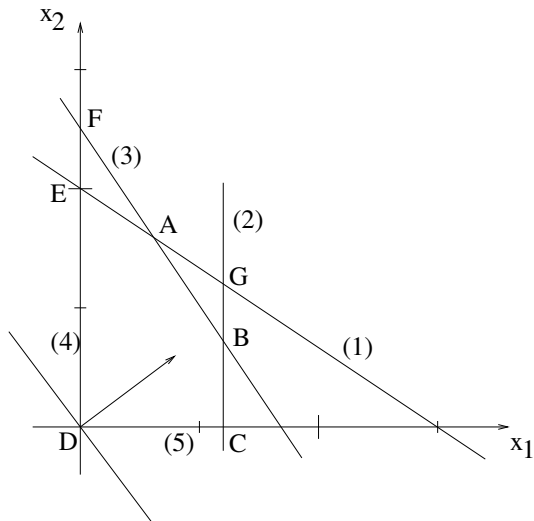
$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & (5) \end{array}$$

Inför slackvariabler.

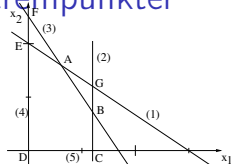
$$\begin{array}{rcllclclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$



# Baslösningar representerar extrempunkter

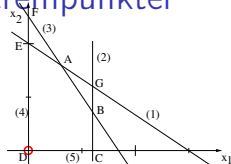


# Baslösningar representerar extrempunkter



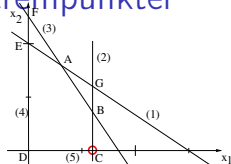
Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut

# Baslösningar representerar extrempunkter



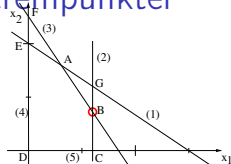
Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$

# Baslösningar representerar extrempunkter



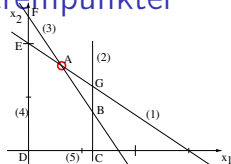
Hörnpunkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$

# Baslösningar representerar extrempunkter



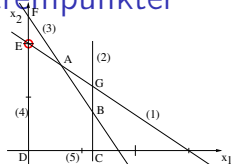
Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$

# Baslösningar representerar extrempunkter



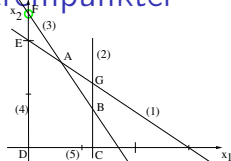
Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$

# Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$

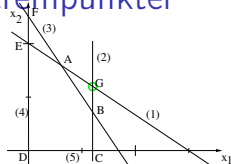
# Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$
F	3,4	$x_1 = 0, x_5 = 0$	$x_2 = 25/2, x_3 = -15/2, x_4 = 6$

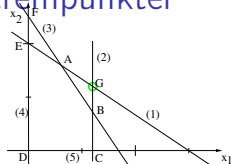


# Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$
F	3,4	$x_1 = 0, x_5 = 0$	$x_2 = 25/2, x_3 = -15/2, x_4 = 6$
G	1,2	$x_3 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 6, x_5 = -10$

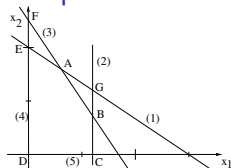
# Baslösningar representerar extrempunkter



Hörpunkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$
F	3,4	$x_1 = 0, x_5 = 0$	$x_2 = 25/2, x_3 = -15/2, x_4 = 6$
G	1,2	$x_3 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 6, x_5 = -10$

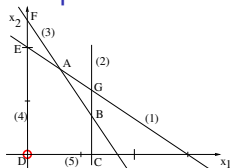
Punkt F och G ej tillåtna, ty negativa variabelvärden.

# Baslösningar representerar extrempunkter



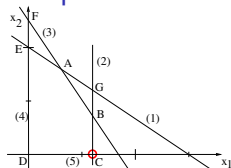
Hörn-punkt	Icke-bas-variabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion

# Baslösningar representerar extrempunkter



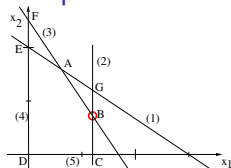
Hörnpunkt	Ickebasvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
D	$x_1, x_2$	$x_3, x_4, x_5$	$z = 4x_1 + 3x_2$

# Baslösningar representerar extrempunkter



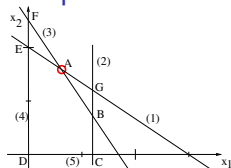
Hörnpunkt	Ickebasvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
C	$x_2, x_4$	$x_1, x_3, x_5$	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	$x_1, x_2$	$x_3, x_4, x_5$	$z = 4x_1 + 3x_2$

# Baslösningar representerar extrempunkter



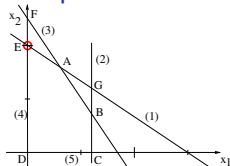
Hörnpunkt	Ickebasvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
B	$x_4, x_5$	$x_1, x_2, x_3$	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	$x_2, x_4$	$x_1, x_3, x_5$	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	$x_1, x_2$	$x_3, x_4, x_5$	$z = 4x_1 + 3x_2$

# Baslösningar representerar extrempunkter



Hörnpunkt	Ickebasvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
A	$x_3, x_5$	$x_1, x_2, x_4$	$z = 36 - 1/5x_3 - 3/5x_5$
B	$x_4, x_5$	$x_1, x_2, x_3$	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	$x_2, x_4$	$x_1, x_3, x_5$	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	$x_1, x_2$	$x_3, x_4, x_5$	$z = 4x_1 + 3x_2$

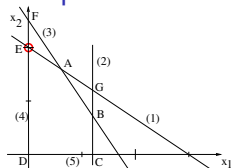
# Baslösningar representerar extrempunkter



Hörnpunkt	Ickebasvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
A	$x_3, x_5$	$x_1, x_2, x_4$	$z = 36 - 1/5x_3 - 3/5x_5$
B	$x_4, x_5$	$x_1, x_2, x_3$	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	$x_2, x_4$	$x_1, x_3, x_5$	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	$x_1, x_2$	$x_3, x_4, x_5$	$z = 4x_1 + 3x_2$
E	$x_1, x_3$	$x_2, x_4, x_5$	$z = 30 + 2x_1 - x_3$



## Baslösningar representerar extrempunkter



Hörnpunkt	Ickebasvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
A	$x_3, x_5$	$x_1, x_2, x_4$	$z = 36 - 1/5x_3 - 3/5x_5$
B	$x_4, x_5$	$x_1, x_2, x_3$	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	$x_2, x_4$	$x_1, x_3, x_5$	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	$x_1, x_2$	$x_3, x_4, x_5$	$z = 4x_1 + 3x_2$
E	$x_1, x_3$	$x_2, x_4, x_5$	$z = 30 + 2x_1 - x_3$

Punkt A optimal, ty negativa reducerade kostnader.

# Baslösningar, hur byta

# Baslösningar, hur byta

- Byt en basvariabel i taget.

## Baslösningar, hur byta

- Byt en basvariabel i taget.
- Öka ickebasvariabel med positiv reducerad kostnad. (Ökar  $z$ .)
- Gör ökningen så stor som möjligt,

## Baslösningar, hur byta

- Byt en basvariabel i taget.
- Öka ickebasvariabel med positiv reducerad kostnad. (Ökar  $z$ .)
- Gör ökningen så stor som möjligt,  
dvs. så att en basvariabel blir noll och ingen negativ.

## Exempel

$$\begin{array}{rcllclclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & = 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & & = 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 = 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 \geq 0 \end{array}$$

## Exempel

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1 + x_4 = 6$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_5 = 50$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

## Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$\begin{aligned} 2t + x_3 &= 30 \\ t + x_4 &= 6 \\ 6t + x_5 &= 50 \end{aligned}$$



## Exempel

$$\begin{array}{rclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & = 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & + & x_5 = 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t$$

## Exempel

$$\begin{array}{rclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0$$

## Exempel

$$\begin{aligned}\max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ & x_1 + x_4 = 6 \\ & 6x_1 + 4x_2 + x_5 = 50 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0\end{aligned}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

## Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ & x_1 + x_4 = 6 \\ & 6x_1 + 4x_2 + x_5 = 50 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t$$

## Exempel

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 30 \\ & & x_1 & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0$$

## Exempel

$$\begin{array}{rcllclcl} \max & z & = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 30 \\ & & & x_1 & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

## Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ & x_1 + x_4 = 6 \\ & 6x_1 + 4x_2 + x_5 = 50 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t$$

## Exempel

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 30 \\ & & x_1 & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t \geq 0$$



## Exempel

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 30 \\ & & x_1 & & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50/6 \approx 8.333$$

## Exempel

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 30 \\ & & x_1 & & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50/6 \approx 8.333$$

Ger  $t = 6$ ,

## Exempel

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & = 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & & = 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 = 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 \geq 0 \end{array}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50/6 \approx 8.333$$

Ger  $t = 6$ , dvs.  $x_1 = 6$

## Exempel

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 30 \\ & & x_1 & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Basvariabler:  $x_3, x_4, x_5$ . Dvs.  $x_1 = 0, x_2 = 0$  och  $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$ .

Öka  $x_1$  (verkar bäst). Sätt  $x_1 = t, x_2 = 0$ , vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50/6 \approx 8.333$$

Ger  $t = 6$ , dvs.  $x_1 = 6$

och  $x_3 = 30 - 12 = 18, x_4 = 6 - 6 = 0, x_5 = 50 - 36 = 14$ .

## Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut  $m$  **basvariabler**, sätta **icke-basvariablerna** till noll, och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet  $Ax = b$ . Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

## Baslösning, teoretiskt

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, A = (B \ N), c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}.$$

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

## Baslösning, teoretiskt

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, A = (B \ N), c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}.$$

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$$

## Baslösning, teoretiskt

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, A = (B \ N), c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}.$$

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$$

där  $\hat{z} = c_B^T B^{-1}b$  och  $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1}N)^T$ , eller separat  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$

där  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .



## Baslösning, teoretiskt

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, A = (B \ N), c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}.$$

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$$

där  $\hat{z} = c_B^T B^{-1}b$  och  $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1}N)^T$ , eller separat  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$

där  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .

$\hat{c}_N$  kallas **reducerade kostnader**.

## Baslösning, teoretiskt

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, A = (B \ N), c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}.$$

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$$

där  $\hat{z} = c_B^T B^{-1}b$  och  $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1}N)^T$ , eller separat  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$

där  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .

$\hat{c}_N$  kallas **reducerade kostnader**. Baslösningen som fås för  $x_N = 0$  och  $x_B = B^{-1}b$  är **tillåten** om  $B^{-1}b \geq 0$  och **optimal** om  $\hat{c}_N \leq 0$ .

## Baslösning, teoretiskt

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, A = (B \ N), c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}.$$

$$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$$

där  $\hat{z} = c_B^T B^{-1}b$  och  $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1}N)^T$ , eller separat  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$

där  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .

$\hat{c}_N$  kallas **reducerade kostnader**. Baslösningen som fås för  $x_N = 0$  och  $x_B = B^{-1}b$  är **tillåten** om  $B^{-1}b \geq 0$  och **optimal** om  $\hat{c}_N \leq 0$ .

### Sats

Varje extrempunkt i en polyeder kan definieras av (minst) en tillåten baslösning.

# Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

# Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

# Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås:

# Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad,  $\max_j \hat{c}_j$ . (för max-problem)

# Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad,  $\max_j \hat{c}_j$ . (för max-problem)

Om  $\hat{c}_j \leq 0$  för all  $j$ : Stopp, optimum funnet.



# Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad,  $\max_j \hat{c}_j$ . (för max-problem)

Om  $\hat{c}_j \leq 0$  för all  $j$ : Stopp, optimum funnet.

2. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls:

# Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad,  $\max_j \hat{c}_j$ . (för max-problem)

Om  $\hat{c}_j \leq 0$  för all  $j$ : Stopp, optimum funnet.

2. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls: Minst kvot mellan högerled och positiv koefficient i inkommande kolumn,  $\min_{i:\hat{a}_{ij}>0} \left( \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \right)$ .

# Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad,  $\max_j \hat{c}_j$ . (för max-problem)

Om  $\hat{c}_j \leq 0$  för all  $j$ : Stopp, optimum funnet.

2. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls: Minst kvot mellan högerled och positiv koefficient i inkommande kolumn,  $\min_{i:\hat{a}_{ij}>0} \left( \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \right)$ .

Om  $\hat{a}_{ij} \leq 0$  för alla  $i$ : Stopp, lösningen är obegränsad.

# Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad,  $\max_j \hat{c}_j$ . (för max-problem)

Om  $\hat{c}_j \leq 0$  för all  $j$ : Stopp, optimum funnet.

2. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls: Minst kvot mellan högerled och positiv koefficient i inkommande kolumn,  $\min_{i:\hat{a}_{ij}>0} \left( \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \right)$ .

Om  $\hat{a}_{ij} \leq 0$  för alla  $i$ : Stopp, lösningen är obegränsad.

3. Byt bas (pivotera): Eliminera inkommande variabel från alla andra rader. Gå till 1.

## Löst exempel

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

## Löst exempel

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Inför slackvariabler,  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ .

## Löst exempel

$$\begin{aligned}\max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 & (1) \\ x_1 &\leq 6 & (2) \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 50 & (3) \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Inför slackvariabler,  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$ .

$$\begin{aligned}\max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0\end{aligned}$$

# Simplexmetoden

$$\begin{array}{rclclclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & = 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & & = 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 = 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 \geq 0 \end{array}$$



# Simplexmetoden

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ \quad \quad x_1 + x_4 = 6 \\ \quad \quad 6x_1 + 4x_2 + x_5 = 50 \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \geq 0 \end{array}$$

Starttablå:

# Simplexmetoden

$$\begin{array}{rcllclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttablå:

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	-4	-3	0	0	0	0
$x_3$	0	2	3	1	0	0	30
$x_4$	0	1	0	0	1	0	6
$x_5$	0	6	4	0	0	1	50

# Simplexmetoden

$$\begin{array}{rcllclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttablå:

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	-4	-3	0	0	0	0
$x_3$	0	2	3	1	0	0	30
$x_4$	0	1	0	0	1	0	6
$x_5$	0	6	4	0	0	1	50

Inkommande variabel:  $x_1$ .

# Simplexmetoden

$$\begin{array}{rcllclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttablå:

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	-4	-3	0	0	0	0
$x_3$	0	2	3	1	0	0	30
$x_4$	0	1	0	0	1	0	6
$x_5$	0	6	4	0	0	1	50

Inkommande variabel:  $x_1$ . Utgående variabel:  $x_4$ .

# Simplexmetoden

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	-3	0	4	0	24
$x_3$	0	0	3	1	-2	0	18
$x_1$	0	1	0	0	1	0	6
$x_5$	0	0	4	0	-6	1	14

# Simplexmetoden

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	-3	0	4	0	24
$x_3$	0	0	3	1	-2	0	18
$x_1$	0	1	0	0	1	0	6
$x_5$	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel:  $x_2$ .

# Simplexmetoden

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	-3	0	4	0	24
$x_3$	0	0	3	1	-2	0	18
$x_1$	0	1	0	0	1	0	6
$x_5$	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel:  $x_2$ . Utgående variabel:  $x_5$ .

# Simplexmetoden

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	-3	0	4	0	24
$x_3$	0	0	3	1	-2	0	18
$x_1$	0	1	0	0	1	0	6
$x_5$	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel:  $x_2$ . Utgående variabel:  $x_5$ .

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	0	-1/2	3/4	69/2
$x_3$	0	0	0	1	5/2	-3/4	15/2
$x_1$	0	1	0	0	1	0	6
$x_2$	0	0	1	0	-3/2	1/4	7/2



# Simplexmetoden

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	-3	0	4	0	24
$x_3$	0	0	3	1	-2	0	18
$x_1$	0	1	0	0	1	0	6
$x_5$	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel:  $x_2$ . Utgående variabel:  $x_5$ .

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	0	-1/2	3/4	69/2
$x_3$	0	0	0	1	5/2	-3/4	15/2
$x_1$	0	1	0	0	1	0	6
$x_2$	0	0	1	0	-3/2	1/4	7/2

Inkommande variabel:  $x_4$ .

# Simplexmetoden

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	-3	0	4	0	24
$x_3$	0	0	3	1	-2	0	18
$x_1$	0	1	0	0	1	0	6
$x_5$	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel:  $x_2$ . Utgående variabel:  $x_5$ .

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	0	-1/2	3/4	69/2
$x_3$	0	0	0	1	5/2	-3/4	15/2
$x_1$	0	1	0	0	1	0	6
$x_2$	0	0	1	0	-3/2	1/4	7/2

Inkommande variabel:  $x_4$ . Utgående variabel:  $x_3$ .

# Simplexmetoden

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
$x_4$	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
$x_1$	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
$x_2$	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

# Simplexmetoden

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
$x_4$	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
$x_1$	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
$x_2$	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

Ingen inkommande variabel.

# Simplexmetoden

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
$x_4$	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
$x_1$	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
$x_2$	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

Ingen inkommande variabel. Optimaltablå.

# Simplexmetoden

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
$x_4$	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
$x_1$	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
$x_2$	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

Ingen inkommande variabel. Optimaltablå.

**Optimallösning:**  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

# Simplexmetoden

Bas	$z$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\hat{b}$
$z$	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
$x_4$	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
$x_1$	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
$x_2$	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

Ingen inkommande variabel. Optimaltablå.

**Optimallösning:**  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 8$ ,  $z = 36$ .

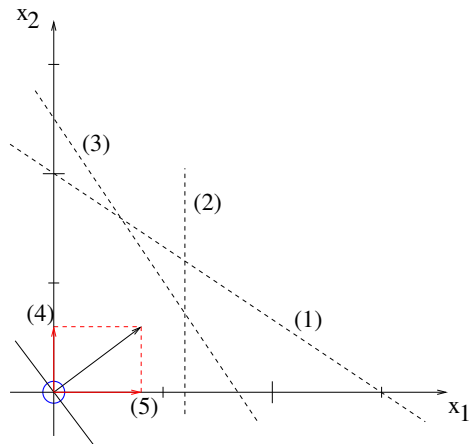
## Slack:

Villkor 1 aktivt ( $x_3 = 0$ ).

Villkor 2 ej aktivt ( $x_4 = 3$ ).

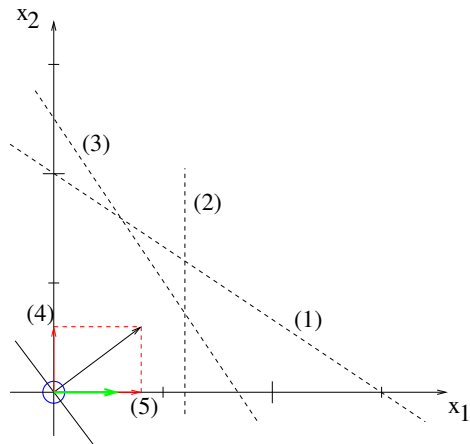
Villkor 3 aktivt ( $x_5 = 0$ ).

# Simplexmetoden

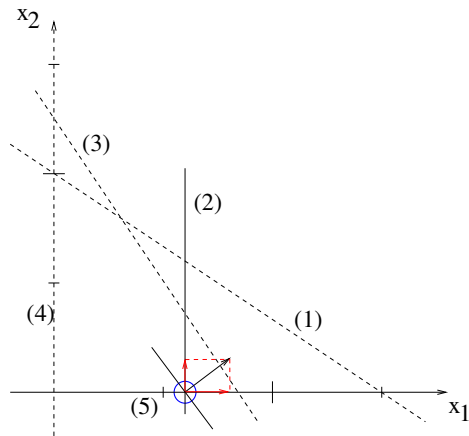




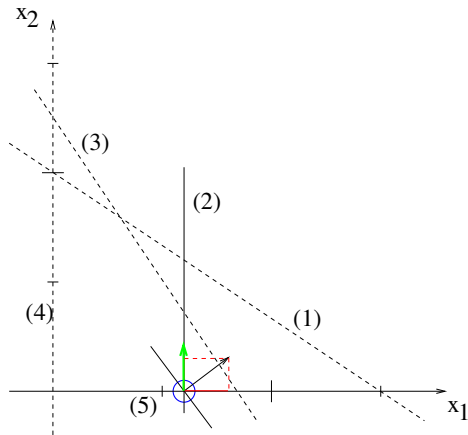
# Simplexmetoden



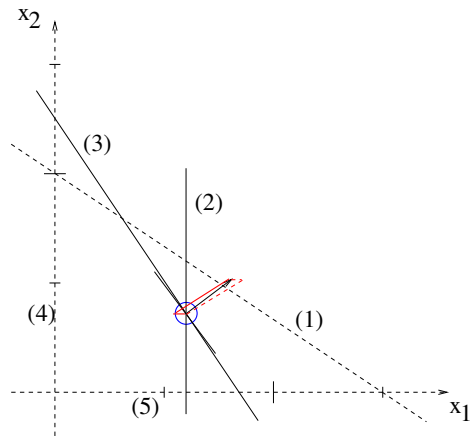
# Simplexmetoden



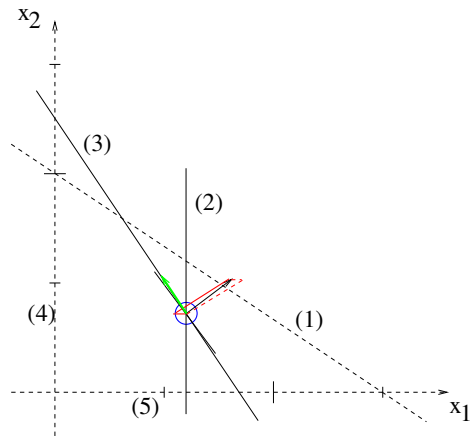
# Simplexmetoden



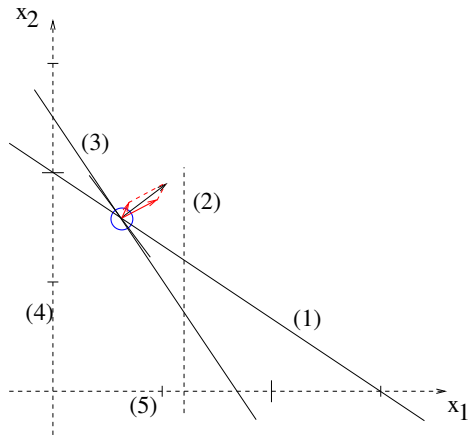
# Simplexmetoden



# Simplexmetoden



# Simplexmetoden



## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .



## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .

1. Beräkna  $B^{-1}$ .

## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .

1. Beräkna  $B^{-1}$ .

2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ .

## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .

1. Beräkna  $B^{-1}$ .

2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ . Variablernas värden:  $x_B = \hat{b}$ ,  $x_N = 0$ .

## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .
1. Beräkna  $B^{-1}$ .
2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ . Variablernas värden:  $x_B = \hat{b}$ ,  $x_N = 0$ .
3. Beräkna målfunktionsvärdet:  $z = c_B^T x_B$ .

## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .

1. Beräkna  $B^{-1}$ .

2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ . Variablernas värden:  $x_B = \hat{b}$ ,  $x_N = 0$ .

3. Beräkna målfunktionsvärdet:  $z = c_B^T x_B$ .

4. Beräkna skuggpriser:  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .

## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .

1. Beräkna  $B^{-1}$ .

2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ . Variablernas värden:  $x_B = \hat{b}$ ,  $x_N = 0$ .

3. Beräkna målfunktionsvärdet:  $z = c_B^T x_B$ .

4. Beräkna skuggpriser:  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .

5. Beräkna reducerade kostnader:  $\hat{c}_N = c_N - N^T y$

## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .
1. Beräkna  $B^{-1}$ .
2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ . Variablernas värden:  $x_B = \hat{b}$ ,  $x_N = 0$ .
3. Beräkna målfunktionsvärdet:  $z = c_B^T x_B$ .
4. Beräkna skuggpriser:  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .
5. Beräkna reducerade kostnader:  $\hat{c}_N = c_N - N^T y$  (dvs  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ ).

## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .
1. Beräkna  $B^{-1}$ .
2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ . Variablernas värden:  $x_B = \hat{b}$ ,  $x_N = 0$ .
3. Beräkna målfunktionsvärdet:  $z = c_B^T x_B$ .
4. Beräkna skuggpriser:  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .
5. Beräkna reducerade kostnader:  $\hat{c}_N = c_N - N^T y$  (dvs  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ ).
6. Om  $\hat{c}_N \leq 0$ : Stopp, optimum.



## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .
1. Beräkna  $B^{-1}$ .
  2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ . Variablernas värden:  $x_B = \hat{b}$ ,  $x_N = 0$ .
  3. Beräkna målfunktionsvärdet:  $z = c_B^T x_B$ .
  4. Beräkna skuggpriser:  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .
  5. Beräkna reducerade kostnader:  $\hat{c}_N = c_N - N^T y$  (dvs  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ ).
  6. Om  $\hat{c}_N \leq 0$ : Stopp, optimum.
  7. Välj **inkommande** variabel  $x_k$  så att **förbättring** fås:  $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$ .

## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .
1. Beräkna  $B^{-1}$ .
2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ . Variablernas värden:  $x_B = \hat{b}$ ,  $x_N = 0$ .
3. Beräkna målfunktionsvärdet:  $z = c_B^T x_B$ .
4. Beräkna skuggpriser:  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .
5. Beräkna reducerade kostnader:  $\hat{c}_N = c_N - N^T y$  (dvs  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ ).
6. Om  $\hat{c}_N \leq 0$ : Stopp, optimum.
7. Välj **inkommande** variabel  $x_k$  så att **förbättring** fås:  $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$ .
8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas:  $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$ .

## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .
1. Beräkna  $B^{-1}$ .
2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ . Variablernas värden:  $x_B = \hat{b}$ ,  $x_N = 0$ .
3. Beräkna målfunktionsvärdet:  $z = c_B^T x_B$ .
4. Beräkna skuggpriser:  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .
5. Beräkna reducerade kostnader:  $\hat{c}_N = c_N - N^T y$  (dvs  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ ).
6. Om  $\hat{c}_N \leq 0$ : Stopp, optimum.
7. Välj **inkommande** variabel  $x_k$  så att **förbättring** fås:  $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$ .
8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas:  $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$ .
9. Om  $\hat{a}_k \leq 0$ : Stopp, problemet har obegränsad lösning.

## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .
1. Beräkna  $B^{-1}$ .
2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ . Variablernas värden:  $x_B = \hat{b}$ ,  $x_N = 0$ .
3. Beräkna målfunktionsvärdet:  $z = c_B^T x_B$ .
4. Beräkna skuggpriser:  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .
5. Beräkna reducerade kostnader:  $\hat{c}_N = c_N - N^T y$  (dvs  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ ).
6. Om  $\hat{c}_N \leq 0$ : Stopp, optimum.
7. Välj **inkommande** variabel  $x_k$  så att **förbättring** fås:  $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$ .
8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas:  $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$ .
9. Om  $\hat{a}_k \leq 0$ : Stopp, problemet har obegränsad lösning.
10. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls:  $\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min_{i: \hat{a}_{ik} > 0} \left( \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \right)$ .

## Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler),  $Ax = b$ .

0. Skaffa en tillåten startbas:  $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ,  $A = (B \ N)$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ .
1. Beräkna  $B^{-1}$ .
2. Beräkna högerled:  $\hat{b} = B^{-1}b$ . Variablernas värden:  $x_B = \hat{b}$ ,  $x_N = 0$ .
3. Beräkna målfunktionsvärdet:  $z = c_B^T x_B$ .
4. Beräkna skuggpriser:  $y = (c_B^T B^{-1})^T$ .
5. Beräkna reducerade kostnader:  $\hat{c}_N = c_N - N^T y$  (dvs  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ ).
6. Om  $\hat{c}_N \leq 0$ : Stopp, optimum.
7. Välj **inkommande** variabel  $x_k$  så att **förbättring** fås:  $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$ .
8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas:  $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$ .
9. Om  $\hat{a}_k \leq 0$ : Stopp, problemet har obegränsad lösning.
10. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls:  $\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min_{i:\hat{a}_{ik}>0} \left( \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \right)$ .
11. Byt bas: Uppdatera  $B$ ,  $N$ ,  $c_B$  och  $c_N$ . Gå till 1.

## Simplextablån, teoretiskt

$$\max z = c^T x$$

$$\text{då} \quad Ax + Ix_S = b$$

$$x, x_S \geq 0$$

# Simplextablån, teoretiskt

$$\max z = c^T x$$

$$\text{då} \quad Ax + Ix_S = b$$

$$x, x_S \geq 0$$

Bas	$z$	$x$	$x_S$	$\hat{b}$
$z$	1	$-c^T$	$\mathbf{0}$	0
$x_S$	$\mathbf{0}$	$A$	$I$	$b$

(Starttablå)

# Simplextablån, teoretiskt

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ \text{då} \quad & Ax + Ix_S = b \\ & x, x_S \geq 0 \end{aligned}$$

Bas	$z$	$x$	$x_S$	$\hat{b}$
$z$	1	$-c^T$	$\mathbf{0}$	0
$x_S$	$\mathbf{0}$	$A$	$I$	$b$

(Starttablå)

Bas	$z$	$x$	$x_S$	$\hat{b}$
$z$	1	$c_B^T B^{-1} A - c^T$	$c_B^T B^{-1}$	$c_B^T B^{-1} b$
$x_B$	$\mathbf{0}$	$B^{-1} A$	$B^{-1}$	$B^{-1} b$

(Optimaltablå)



# Simplextablån, teoretiskt

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ \text{då} \quad & Ax + Ix_S = b \\ & x, x_S \geq 0 \end{aligned}$$

Bas	$z$	$x$	$x_S$	$\hat{b}$
$z$	1	$-c^T$	$\mathbf{0}$	0
$x_S$	$\mathbf{0}$	$A$	$I$	$b$

(Starttablå)

Bas	$z$	$x$	$x_S$	$\hat{b}$
$z$	1	$c_B^T B^{-1} A - c^T$	$c_B^T B^{-1}$	$c_B^T B^{-1} b$
$x_B$	$\mathbf{0}$	$B^{-1} A$	$B^{-1}$	$B^{-1} b$

(Optimaltablå)

$B^{-1}$  kan läsas ut ut optimaltablån.

# Simplextablån, teoretiskt

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ \text{då} \quad & Ax + Ix_S = b \\ & x, x_S \geq 0 \end{aligned}$$

Bas	$z$	$x$	$x_S$	$\hat{b}$
$z$	1	$-c^T$	$\mathbf{0}$	0
$x_S$	$\mathbf{0}$	$A$	$I$	$b$

(Starttablå)

Bas	$z$	$x$	$x_S$	$\hat{b}$
$z$	1	$c_B^T B^{-1} A - c^T$	$c_B^T B^{-1}$	$c_B^T B^{-1} b$
$x_B$	$\mathbf{0}$	$B^{-1} A$	$B^{-1}$	$B^{-1} b$

(Optimaltablå)

$B^{-1}$  kan läsas ut ut optimaltablån.

Och  $c_B^T B^{-1}$ .

# Degeneration och konvergens

## Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

# Degeneration och konvergens

## Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.

# Degeneration och konvergens

## Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.
- Varje iteration i simplexmetoden ger ett positivt värde på inkommande variabel, och en strikt förbättring i målfunktionsvärde.

# Degeneration och konvergens

## Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.
- Varje iteration i simplexmetoden ger ett positivt värde på inkommande variabel, och en strikt förbättring i målfunktionsvärde.
- Man kan därför aldrig komma tillbaka till en redan besökt extrempunkt.

# Degeneration och konvergens

## Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.
- Varje iteration i simplexmetoden ger ett positivt värde på inkommande variabel, och en strikt förbättring i målfunktionsvärde.
- Man kan därför aldrig komma tillbaka till en redan besökt extrempunkt.
- Det finns ändligt många extrempunkter, så detta kan bara upprepas ett ändligt antal gånger.

# Degeneration och konvergens

## Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.



# Degeneration och konvergens

## Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning:  $\hat{b}_i = 0$ .

# Degeneration och konvergens

## Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning:  $\hat{b}_i = 0$ .

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

# Degeneration och konvergens

## Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning:  $\hat{b}_i = 0$ .

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

Om flera basvariabler är noll: Många iterationer i samma punkt. Ingen förbättring. Samma bas *kan* återkomma.

# Degeneration och konvergens

## Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning:  $\hat{b}_i = 0$ .

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

Om flera basvariabler är noll: Många iterationer i samma punkt. Ingen förbättring. Samma bas *kan* återkomma.

Om samma bas återkommer: Cykling!

# Degeneration och konvergens

## Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning:  $\hat{b}_i = 0$ .

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

Om flera basvariabler är noll: Många iterationer i samma punkt. Ingen förbättring. Samma bas *kan* återkomma.

Om samma bas återkommer: Cykling!

Cykling kan förhindras genom speciella val av inkommande och utgående variabler.

## Västa fall för simplexmetoden

**Berömt exempel:** Klee-Minty (1972)

$$\max z = 10x_1 + 3x_2$$

$$\text{då} \quad x_1 \leq 1$$

$$20x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## Västa fall för simplexmetoden

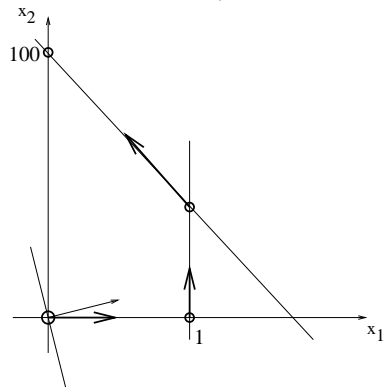
Berömt exempel: Klee-Minty (1972)

$$\max z = 10x_1 + 3x_2$$

$$\text{då} \quad x_1 \leq 1$$

$$20x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



## Västa fall för simplexmetoden

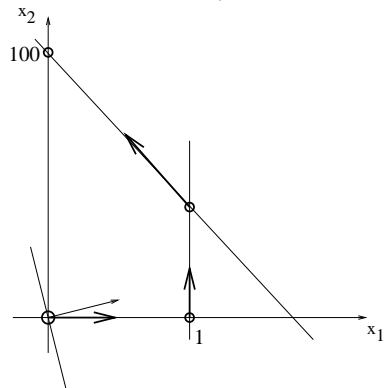
Berömt exempel: Klee-Minty (1972)

$$\max z = 10x_1 + 3x_2$$

$$\text{då} \quad x_1 \leq 1$$

$$20x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Besöker *alla* extrempunkter.



## Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler,  $n$ .

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j$$

$$\text{då} \quad 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i \leq 100^{i-1} \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

## Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler,  $n$ .

$$\max z = \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j$$

$$\text{då } 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i \leq 100^{i-1} \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Simplexmetoden kräver  $2^n - 1$  iterationer.

## Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler,  $n$ .

$$\max z = \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j$$

$$\text{då } 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i \leq 100^{i-1} \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Simplexmetoden kräver  $2^n - 1$  iterationer.

Varje iteration kräver  $O(m^2)$  (uppdatering av  $B^{-1}$ ).

## Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler,  $n$ .

$$\max z = \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j$$

$$\text{då } 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i \leq 100^{i-1} \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Simplexmetoden kräver  $2^n - 1$  iterationer.

Varje iteration kräver  $O(m^2)$  (uppdatering av  $B^{-1}$ ).

Empiriskt: I medel  $m^3$  iterationer för verkliga problem.

## Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler ( $n$ ), men inte så många bivillkor ( $m$ ).

## Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler ( $n$ ), men inte så många bivillkor ( $m$ ).

Notera att  $B$  (och  $B^{-1}$ ) har storleken  $m \times m$ .

## Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler ( $n$ ), men inte så många bivillkor ( $m$ ).

Notera att  $B$  (och  $B^{-1}$ ) har storleken  $m \times m$ .

$y$  har längden  $m$ .

## Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler ( $n$ ), men inte så många bivillkor ( $m$ ).

Notera att  $B$  (och  $B^{-1}$ ) har storleken  $m \times m$ .

$y$  har längden  $m$ .

$x_B$  har längden  $m$ .



## Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler ( $n$ ), men inte så många bivillkor ( $m$ ).

Notera att  $B$  (och  $B^{-1}$ ) har storleken  $m \times m$ .

$y$  har längden  $m$ .

$x_B$  har längden  $m$ .

Men  $x_N$  och  $\hat{c}_N$  är väldigt långa.

## Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler ( $n$ ), men inte så många bivillkor ( $m$ ).

Notera att  $B$  (och  $B^{-1}$ ) har storleken  $m \times m$ .

$y$  har längden  $m$ .

$x_B$  har längden  $m$ .

Men  $x_N$  och  $\hat{c}_N$  är väldigt långa.  $N$  är jättestor.

## Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler ( $n$ ), men inte så många bivillkor ( $m$ ).

Notera att  $B$  (och  $B^{-1}$ ) har storleken  $m \times m$ .

$y$  har längden  $m$ .

$x_B$  har längden  $m$ .

Men  $x_N$  och  $\hat{c}_N$  är väldigt långa.  $N$  är jättestor.

Var smart: Läs in  $a_j$  och beräkna  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$  för ett  $j$  åt gången.

## Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler ( $n$ ), men inte så många bivillkor ( $m$ ).

Notera att  $B$  (och  $B^{-1}$ ) har storleken  $m \times m$ .

$y$  har längden  $m$ .

$x_B$  har längden  $m$ .

Men  $x_N$  och  $\hat{c}_N$  är väldigt långa.  $N$  är jättestor.

Var smart: Läs in  $a_j$  och beräkna  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$  för ett  $j$  åt gången.

Släng de som inte blir inkommande,  $\hat{c}_j \leq 0$ .

## Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler ( $n$ ), men inte så många bivillkor ( $m$ ).

Notera att  $B$  (och  $B^{-1}$ ) har storleken  $m \times m$ .

$y$  har längden  $m$ .

$x_B$  har längden  $m$ .

Men  $x_N$  och  $\hat{c}_N$  är väldigt långa.  $N$  är jättestor.

Var smart: Läs in  $a_j$  och beräkna  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$  för ett  $j$  åt gången.

Släng de som inte blir inkommande,  $\hat{c}_j \leq 0$ .

Tag första  $x_j$  med  $\hat{c}_j > 0$  som inkommande.

## Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler ( $n$ ), men inte så många bivillkor ( $m$ ).

Notera att  $B$  (och  $B^{-1}$ ) har storleken  $m \times m$ .

$y$  har längden  $m$ .

$x_B$  har längden  $m$ .

Men  $x_N$  och  $\hat{c}_N$  är väldigt långa.  $N$  är jättestor.

Var smart: Läs in  $a_j$  och beräkna  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$  för ett  $j$  åt gången.

Släng de som inte blir inkommande,  $\hat{c}_j \leq 0$ .

Tag första  $x_j$  med  $\hat{c}_j > 0$  som inkommande.

Resultat: Vi behöver aldrig spara något jättestort.

## Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler ( $n$ ), men inte så många bivillkor ( $m$ ).

Notera att  $B$  (och  $B^{-1}$ ) har storleken  $m \times m$ .

$y$  har längden  $m$ .

$x_B$  har längden  $m$ .

Men  $x_N$  och  $\hat{c}_N$  är väldigt långa.  $N$  är jättestor.

Var smart: Läs in  $a_j$  och beräkna  $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$  för ett  $j$  åt gången.

Släng de som inte blir inkommande,  $\hat{c}_j \leq 0$ .

Tag första  $x_j$  med  $\hat{c}_j > 0$  som inkommande.

Resultat: Vi behöver aldrig spara något jättestort.

Kan lösa problem som är så stora att vi inte får plats med hela problemet i minnet.