Vårt första exempel

Variabeldefinition:

x_1 = antal enheter Optimus som görs varje timme.
x_2 = antal enheter Rullmus som görs varje timme.

Matematisk modell:

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & \text{(knappar)} \\
 & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & \text{(optik)} \\
 & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & \text{(monteringstid)} \\
 & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) & \\
 & & & & x_2 & \geq & 0 & (5) &
\end{array}
$$

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & \color{red}{(y_1)} \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & \color{red}{(y_2)} \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & \color{red}{(y_3)} \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i.

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\
 & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\
 & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i.

LP-dual:

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & \color{red}{(y_1)} \\
 & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & \color{red}{(y_2)} \\
 & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & \color{red}{(y_3)} \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i.

LP-dual: Minimera kostnaden.

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & \color{red}{(y_1)} \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & \color{red}{(y_2)} \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & \color{red}{(y_3)} \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i.

LP-dual: Minimera kostnaden. Balansera intäkt.

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad \color{red}{(y_1)} \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad \color{red}{(y_2)} \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad \color{red}{(y_3)} \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i.

LP-dual: Minimera kostnaden. Balansera intäkt.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) \\
& & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) \\
& & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$
\begin{array}{llrcrcrl@{\quad}l}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & \color{red}{(y_1)} \\
 & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & \color{red}{(y_2)} \\
 & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & \color{red}{(y_3)} \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i.

LP-dual: Minimera kostnaden. Balansera intäkt.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) \\
 & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) \\
 & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Komplementaritetsvillkoren:

Priset är noll om råvaran inte används fullt ut.

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$
\begin{array}{llcccccl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad {\color{red}(y_1)} \\
 & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad {\color{red}(y_2)} \\
 & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad {\color{red}(y_3)} \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i.

LP-dual: Minimera kostnaden. Balansera intäkt.

$$
\begin{array}{llcccccccl}
\min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) \quad {\color{red}(x_1)} \\
 & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) \quad {\color{red}(x_2)} \\
 & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Komplementaritetsvillkoren:
Priset är noll om råvaran inte används fullt ut.
Produkten görs ej om kostnaden blir högre än intäkten.

LP-dualitet: Generellt

Primal:

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i = 1, \dots, m \\
& x_j \ge 0 & j = 1, \dots, n
\end{array}
$$

LP-dualitet: Generellt

Primal:

$$
\begin{array}{llll}
\max & z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{då} & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i = 1, \ldots, m \\
& & x_j \ge 0 & j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & c^T x \\
\text{då} & & Ax \le b \\
& & x \ge 0
\end{array}
$$

LP-dualitet: Generellt

Primal:

$$\begin{aligned} \max \quad z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad z = & \; c^T x \\ \text{då} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v = & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{då} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad j = 1, \ldots, n \\ & y_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

LP-dualitet: Generellt

Primal:

$$\begin{aligned} \max \quad z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{då} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad z = \; & c^T x \\ \text{då} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v = & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{då} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad j = 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad v = \; & b^T y \\ \text{då} \quad & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om x är tillåten i primalen och y är tillåten i dualen så $c^T x \leq b^T y$.

(bevis) (rita)

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om x är tillåten i primalen och y är tillåten i dualen så $c^T x \leq b^T y$.

(bevis) (rita)

Följdsats

Om $\bar{x}$ är tillåten i primalen, $\bar{y}$ är tillåten i dualen och $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ så är $\bar{x}$ optimal i primalen och $\bar{y}$ optimal i dualen.

(se figur)

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om x är tillåten i primalen och y är tillåten i dualen så $c^T x \leq b^T y$.

(bevis) (rita)

Följdsats

Om $\bar{x}$ är tillåten i primalen, $\bar{y}$ är tillåten i dualen och $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ så är $\bar{x}$ optimal i primalen och $\bar{y}$ optimal i dualen.

(se figur)

Följdsats

Om primalen (dualen) är obegränsad, så saknar dualen (primalen) tillåten lösning.

Båda kan dock sakna lösning.

LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel, y_i, anger hur mycket primala bivillkor i “tar emot”.

LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel, y_i, anger hur mycket primala bivillkor i "tar emot".

Ett bivillkor som inte är aktivt tar inte emot alls.

LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel, y_i, anger hur mycket primala bivillkor i "tar emot".

Ett bivillkor som inte är aktivt tar inte emot alls.

Komplementaritet (i ord):
Om primala bivillkor i inte är aktivt, måste $y_i = 0$.
Om duala bivillkor j inte är aktivt, måste $x_j = 0$.

LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel, y_i, anger hur mycket primala bivillkor i “tar emot”.

Ett bivillkor som inte är aktivt tar inte emot alls.

Komplementaritet (i ord):
Om primala bivillkor i inte är aktivt, måste $y_i = 0$.
Om duala bivillkor j inte är aktivt, måste $x_j = 0$.

Komplementaritetsvillkoren

Primallösningen x och duallösningen y uppfyller komplementaritetsvillkoren om

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0 \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0 \quad j = 1, \ldots, n$$

LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^Ty - c) = 0$$

LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

Sats

Om x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är $c^T x = b^T y$.

LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

Sats

Om x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är $c^T x = b^T y$.

Följdsats

Om x är tillåten i primalen, y är tillåten i dualen och x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är x optimal i primalen och y optimal i dualen.

LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^Ty - c) = 0$$

Sats

Om x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är $c^Tx = b^Ty$.

Följdsats

Om x är tillåten i primalen, y är tillåten i dualen och x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är x optimal i primalen och y optimal i dualen.

Åt andra hållet:

LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

Sats

Om x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är $c^T x = b^T y$.

Följdsats

Om x är tillåten i primalen, y är tillåten i dualen och x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är x optimal i primalen och y optimal i dualen.

Åt andra hållet:

Starka dualsatsen

Om x och y är optimallösningar så gäller $c^T x = b^T y$.

LP-dualitet: Slutsatser

Fullständiga dualsatsen

• Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning, x^*, så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning, y^*, och $c^T x^* = b^T y^*$.
• Om primalen är obegränsad, så saknar dualen tillåten lösning.
• Om primalen saknar tillåten lösning, så saknar dualen lösning eller har obegränsad lösning.

LP-dualitet: Slutsatser

Fullständiga dualsatsen

• Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning, x^*, så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning, y^*, och $c^T x^* = b^T y^*$.
• Om primalen är obegränsad, så saknar dualen tillåten lösning.
• Om primalen saknar tillåten lösning, så saknar dualen lösning eller har obegränsad lösning.

(Symmetriskt i primal - dual.)

LP-dualitet: Slutsatser

Fullständiga dualsatsen

• Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning, x^*, så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning, y^*, och $c^T x^* = b^T y^*$.
• Om primalen är obegränsad, så saknar dualen tillåten lösning.
• Om primalen saknar tillåten lösning, så saknar dualen lösning eller har obegränsad lösning.

(Symmetriskt i primal - dual.)

Optimalitetsvillkor (KKT)

Primal tillåtenhet +
Dual tillåtenhet +
Komplementaritet
= Optimalitet

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Primal:} & & \\ \max & z = & c^T x \\ \text{då} & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{lll} \text{Dual:} & & \\ \min & v = & b^T y \\ \text{då} & & A^T y \geq c \\ & & y \geq 0 \end{array}\right\}$$

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Primal:} & & \\ \max & z = & c^T x \\ \text{då} & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{lll} \text{Dual:} & & \\ \min & v = & b^T y \\ \text{då} & & A^T y \geq c \\ & & y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Primal	Dual
max	min

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Primal:} & & \\ \max & z = & c^T x \\ \text{då} & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{lll} \text{Dual:} & & \\ \min & v = & b^T y \\ \text{då} & & A^T y \geq c \\ & & y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Variationer:

Primal		Dual
max		min
$Ax \leq b$	$\Rightarrow$	$y \geq 0$

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Primal:} & & \\ \max & z = & c^T x \\ \text{då} & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{lll} \text{Dual:} & & \\ \min & v = & b^T y \\ \text{då} & & A^T y \geq c \\ & & y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Primal		Dual
max		min
$Ax \leq b$	$\Rightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$\Rightarrow$	$y \leq 0$

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Primal:} & & \\ \max & z = & c^T x \\ \text{då} & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{lll} \text{Dual:} & & \\ \min & v = & b^T y \\ \text{då} & & A^T y \geq c \\ & & y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Variationer:

Primal		Dual
max		min
$Ax \leq b$	$\Rightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$\Rightarrow$	$y \leq 0$
$Ax = b$	$\Rightarrow$	y fri

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Primal:} & & \\ \max & z = & c^T x \\ \text{då} & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{lll} \text{Dual:} & & \\ \min & v = & b^T y \\ \text{då} & & A^T y \geq c \\ & & y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Variationer:

Primal		Dual
max		min
$Ax \leq b$	$\Rightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$\Rightarrow$	$y \leq 0$
$Ax = b$	$\Rightarrow$	y fri
$x \geq 0$	$\Rightarrow$	$A^T y \geq c$

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Primal:} & & \\ \max & z = & c^T x \\ \text{då} & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{lll} \text{Dual:} & & \\ \min & v = & b^T y \\ \text{då} & & A^T y \geq c \\ & & y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Primal		Dual
max		min
$Ax \leq b$	$\Rightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$\Rightarrow$	$y \leq 0$
$Ax = b$	$\Rightarrow$	y fri
$x \geq 0$	$\Rightarrow$	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	$\Rightarrow$	$A^T y \leq c$

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
\text{Primal:} & & \\
\max & z = & c^T x \\
\text{då} & & Ax \le b \\
 & & x \ge 0
\end{array}
\right\}
\left\{
\begin{array}{lll}
\text{Dual:} & & \\
\min & v = & b^T y \\
\text{då} & & A^T y \ge c \\
 & & y \ge 0
\end{array}
\right\}
$$

Variationer:

Primal		Dual
max		min
$Ax \le b$	$\Rightarrow$	$y \ge 0$
$Ax \ge b$	$\Rightarrow$	$y \le 0$
$Ax = b$	$\Rightarrow$	y fri
$x \ge 0$	$\Rightarrow$	$A^T y \ge c$
$x \le 0$	$\Rightarrow$	$A^T y \le c$
x fri	$\Rightarrow$	$A^T y = c$

LP-dualitet: Formulering, symmetriskt

Standard:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Dual:} & & \\ \max & z = & c^T x \\ \text{då} & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{lll} \text{Primal:} & & \\ \min & v = & b^T y \\ \text{då} & & A^T y \geq c \\ & & y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Variationer:

Dual		Primal
max		min
$Ax \leq b$	$\Leftarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$\Leftarrow$	$y \leq 0$
$Ax = b$	$\Leftarrow$	y fri
$x \geq 0$	$\Leftarrow$	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	$\Leftarrow$	$A^T y \leq c$
x fri	$\Leftarrow$	$A^T y = c$

LP-dualitet: Formulering, symmetriskt

Standard:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Primal/dual:} & & \\ \max & z = & c^T x \\ \text{då} & & Ax \leq b \\ & & x \geq 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{lll} \text{Dual/primal:} & & \\ \min & v = & b^T y \\ \text{då} & & A^T y \geq c \\ & & y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Variationer:

*		*
max		min
$Ax \leq b$	$\Leftrightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$\Leftrightarrow$	$y \leq 0$
$Ax = b$	$\Leftrightarrow$	y fri
$x \geq 0$	$\Leftrightarrow$	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	$\Leftrightarrow$	$A^T y \leq c$
x fri	$\Leftrightarrow$	$A^T y = c$

LP-dualitet: Formulering: Exempel

Primal:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrll}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 & (1) & \color{red}{(y_1)} \\
& & 7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 16 & (2) & \color{red}{(y_2)} \\
& & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 43 & (3) & \color{red}{(y_3)} \\
& & x_1 & \geq 0, & x_2 & \text{fri}, & x_3 & \leq 0 & & &
\end{array}
$$

LP-dualitet: Formulering: Exempel

Primal:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrll}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 & (1) & \color{red}{(y_1)} \\
& & 7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 16 & (2) & \color{red}{(y_2)} \\
& & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 43 & (3) & \color{red}{(y_3)} \\
& & x_1 & \geq 0, & x_2 & \text{fri}, & x_3 & \leq 0 & & &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrll}
\min & v = & 10y_1 & + & 16y_2 & + & 43y_3 & & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & 7y_2 & + & 3y_3 & \geq & 2 & (1) & \color{red}{(x_1)} \\
& & 3y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & = & 3 & (2) & \color{red}{(x_2)} \\
& & 2y_1 & - & y_2 & + & 4y_3 & \leq & -5 & (3) & \color{red}{(x_3)} \\
& & y_1 & \geq 0, & y_2 & \leq 0, & y_3 & \text{fri} & & &
\end{array}
$$

LP-dualitet: Formulering: Exempel

Primal:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrll}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 & (1) & \color{red}{(y_1)} \\
& & 7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 16 & (2) & \color{red}{(y_2)} \\
& & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 43 & (3) & \color{red}{(y_3)} \\
& & x_1 & \geq 0, & x_2 & \text{fri}, & x_3 & \leq 0 & & &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrll}
\min & v = & 10y_1 & + & 16y_2 & + & 43y_3 & & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & 7y_2 & + & 3y_3 & \geq & 2 & (1) & \color{red}{(x_1)} \\
& & 3y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & = & 3 & (2) & \color{red}{(x_2)} \\
& & 2y_1 & - & y_2 & + & 4y_3 & \leq & -5 & (3) & \color{red}{(x_3)} \\
& & y_1 & \geq 0, & y_2 & \leq 0, & y_3 & \text{fri} & & &
\end{array}
$$

Komplementaritetsvillkoren:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
y_1 & (2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 10) & = & 0 \\
y_2 & (7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 16) & = & 0 \\
x_1 & (2y_1 & + & 7y_2 & + & 3y_3 & - & 2) & = & 0 \\
x_3 & (2y_1 & - & y_2 & + & 4y_3 & + & 5) & = & 0
\end{array}
$$

Dualitet och baslösningar

Att stoppa in en optimal baslösning i LP-dualen och använda komplementaritet ger följande.

Lösning: $x_B = B^{-1}b,\ x_N = 0,\ y = {B^{-1}}^T c_B$.

Dualitet och baslösningar

Att stoppa in en optimal baslösning i LP-dualen och använda komplementaritet ger följande.

Lösning: $x_B = B^{-1}b,\ x_N = 0,\ y = {B^{-1}}^T c_B$.

Dual tillåtenhet $\Leftrightarrow$ primal optimalitet.

Dualitet och baslösningar

Att stoppa in en optimal baslösning i LP-dualen och använda komplementaritet ger följande.

Lösning: $x_B = B^{-1}b,\ x_N = 0,\ y = {B^{-1}}^T c_B$.

Dual tillåtenhet $\Leftrightarrow$ primal optimalitet.

Starka dualsatsen, version 2

Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning, $x^* = B^{-1}b$, så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning, som ges av $y^* = {B^{-1}}^T c_B = (c_B^T B^{-1})^T$.

Både primalen och dualen har det optimala målfunktionsvärdet $z^* = c_B^T B^{-1} b$.

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad ({\color{red}y_1}) \\
 & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad ({\color{red}y_2}) \\
 & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad ({\color{red}y_3}) \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & \color{red}{(y_1)} \\
 & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & \color{red}{(y_2)} \\
 & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & \color{red}{(y_3)} \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrll}
\min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & \color{red}{(x_1)} \\
 & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & \color{red}{(x_2)} \\
 & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & \color{red}{(y_1)} \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & \color{red}{(y_2)} \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & \color{red}{(y_3)} \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrcccl}
\min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & \color{red}{(x_1)} \\
& & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & \color{red}{(x_2)} \\
& & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Komplementaritetsvillkoren:

$$
\begin{array}{llclclclcl}
y_1 & (2x_1 & + & 3x_2 & - & 30) & = & 0 & & \\
y_2 & (\ x_1 & & & - & 6) & = & 0 & & \\
y_3 & (6x_1 & + & 4x_2 & - & 50) & = & 0 & & \\
x_1 & (2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & - & 4) & = & 0 \\
x_2 & (3y_1 & & & + & 4y_3 & - & 3) & = & 0
\end{array}
$$

LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36.$

LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36$.

Basvariabler x_1, x_2, x_4.

LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36$.

Basvariabler x_1, x_2, x_4.

Villkor 1 aktivt.
Villkor 2 ej aktivt $\Rightarrow y_2 = 0$.
Villkor 3 aktivt.

LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning: $x_1 = 3, \; x_2 = 8, \; z = 36.$

Basvariabler x_1, x_2, x_4.

Villkor 1 aktivt.
Villkor 2 ej aktivt $\Rightarrow y_2 = 0.$
Villkor 3 aktivt.

$x_1 > 0 \Rightarrow 2y_1 + y_2 + 6y_3 = 4.$
$x_2 > 0 \Rightarrow 3y_1 + 4y_3 = 3.$

LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36.$

Basvariabler x_1, x_2, x_4.

Villkor 1 aktivt.
Villkor 2 ej aktivt $\Rightarrow y_2 = 0.$
Villkor 3 aktivt.

$x_1 > 0 \Rightarrow 2y_1 + y_2 + 6y_3 = 4.$
$x_2 > 0 \Rightarrow 3y_1 + 4y_3 = 3.$

Dual optimallösning: $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5.$

LP-dualitet och simplextablån

Duallösningen återfinnes under slackvariablerna i optimaltablån.

LP-dualitet och simplextablån

Duallösningen återfinnes under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

LP-dualitet och simplextablån

Duallösningen återfinnes under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Dual optimallösning: $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$
\begin{array}{llcccccccccc}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 10 & \color{red}{(y)} \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$
\begin{array}{llccccccccccl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 10 & (y) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcccl}
\min & v = & 10y & & & & \\
\text{då} & & 2y & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & 2y & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y & \geq & 5 & (3) & (x_3) \\
 & & 4y & \geq & 7 & (4) & (x_4) \\
 & & y & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$
\begin{array}{llccccccccccl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 10 & (y) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{lllllll}
\min & v = & 10y & & & & \\
\text{då} & & 2y & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & 2y & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y & \geq & 5 & (3) & (x_3) \\
 & & 4y & \geq & 7 & (4) & (x_4) \\
 & & y & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Skriv som: min $v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{llcccccccccl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 10 & \color{red}{(y)} \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llcccll}
\min & v = & 10y & & & & \\
\text{då} & & 2y & \geq & 2 & (1) & \color{red}{(x_1)} \\
& & 2y & \geq & 3 & (2) & \color{red}{(x_2)} \\
& & 2y & \geq & 5 & (3) & \color{red}{(x_3)} \\
& & 4y & \geq & 7 & (4) & \color{red}{(x_4)} \\
& & y & \geq & 0 & &
\end{array}$$

Skriv som: min $v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2$, $v = 25$.

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$
\begin{array}{llcccccccccl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 10 & (y) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llcccll}
\min & v = & 10y & & & & \\
\text{då} & & 2y & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & 2y & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y & \geq & 5 & (3) & (x_3) \\
 & & 4y & \geq & 7 & (4) & (x_4) \\
 & & y & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2$, $v = 25$.

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt.

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{llccccccccccl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 10 & (y) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llcccll}
\min & v = & 10y & & & & \\
\text{då} & & 2y & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & 2y & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y & \geq & 5 & (3) & (x_3) \\
 & & 4y & \geq & 7 & (4) & (x_4) \\
 & & y & \geq & 0 & &
\end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2$, $v = 25$.

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$.

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$
\begin{array}{llcccccccccl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 10 & (y) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llcccll}
\min & v = & 10y & & & & \\
\text{då} & & 2y & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & 2y & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y & \geq & 5 & (3) & (x_3) \\
 & & 4y & \geq & 7 & (4) & (x_4) \\
 & & y & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Skriv som: min $v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2$, $v = 25$.

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0$.

$y > 0$

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{llcccccccccl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 10 & (y) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llccccc}
\min & v = & 10y & & & & \\
\text{då} & & 2y & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & 2y & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y & \geq & 5 & (3) & (x_3) \\
 & & 4y & \geq & 7 & (4) & (x_4) \\
 & & y & \geq & 0 & &
\end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2$, $v = 25$.

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0$.

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$.

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{llcccccccccl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & \leq & 10 & (y) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{lllllll}
\min & v = & 10y & & & & \\
\text{då} & & 2y & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & 2y & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y & \geq & 5 & (3) & (x_3) \\
 & & 4y & \geq & 7 & (4) & (x_4) \\
 & & y & \geq & 0 & &
\end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2$, $v = 25$.

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$.

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$. Problemet löst.

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) \\
 & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualitet: Exempel

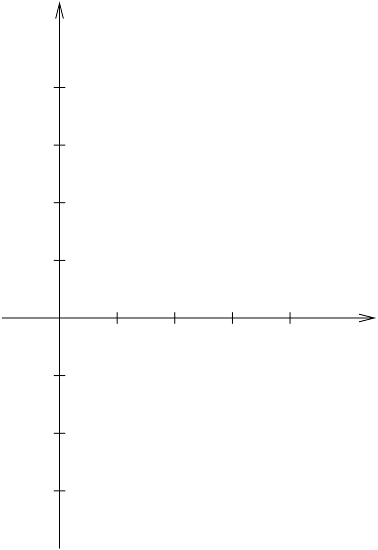
$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

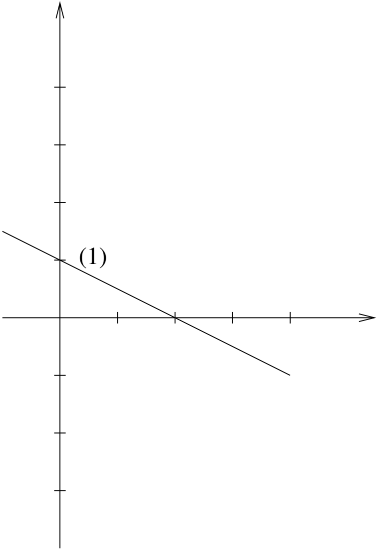
$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) \\
 & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

LP-dualitet: Exempel

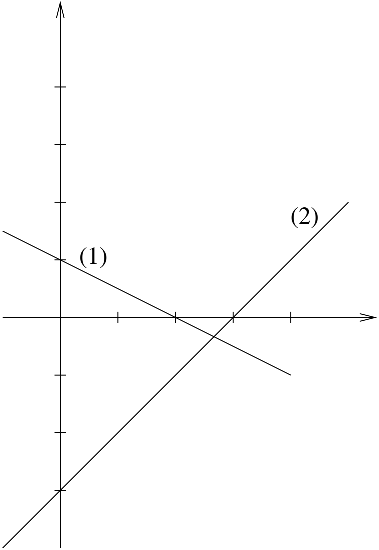


LP-dualitet: Exempel



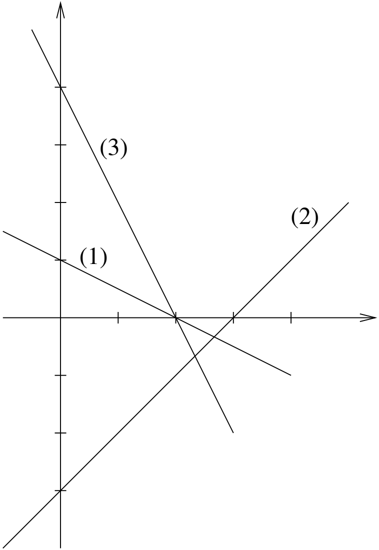
Duala bivillkor 1: $y_1 + 2y_2 \geq 2$.

LP-dualitet: Exempel



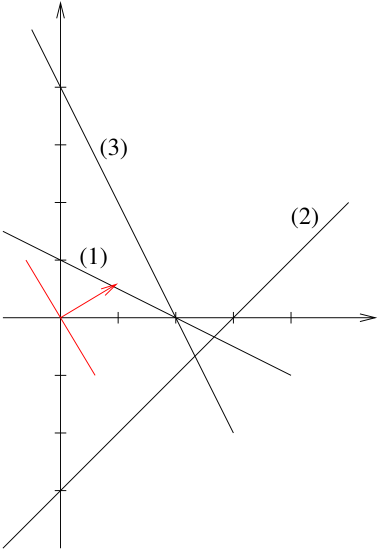
Duala bivillkor 2: $y_1 - y_2 \geq 3$.

LP-dualitet: Exempel



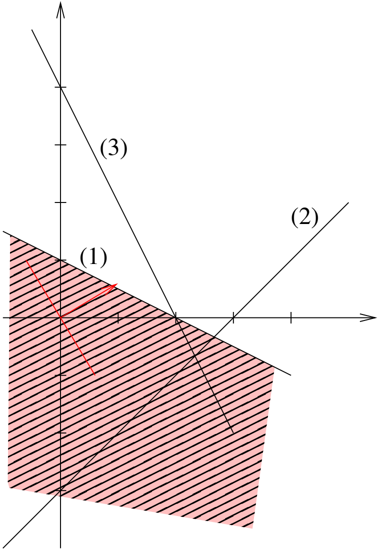
Duala bivillkor 3: $2y_1 + y_2 \geq 4$.

LP-dualitet: Exempel



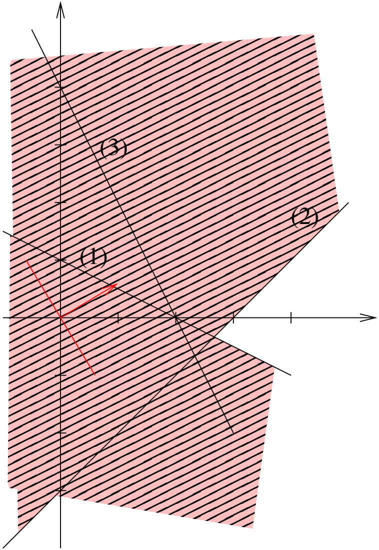
Dual målfunktion: $v = 5y_1 + 3y_2$.

LP-dualitet: Exempel



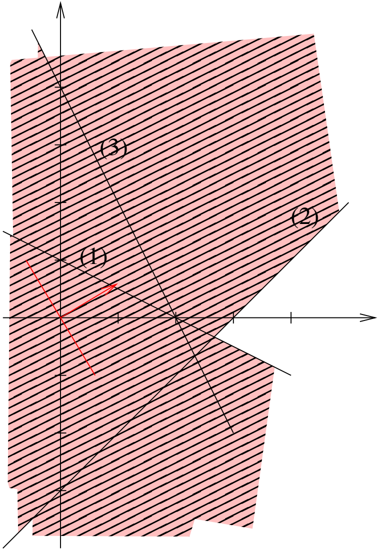
Duala bivillkor 1: $y_1 + 2y_2 \geq 2$.

LP-dualitet: Exempel



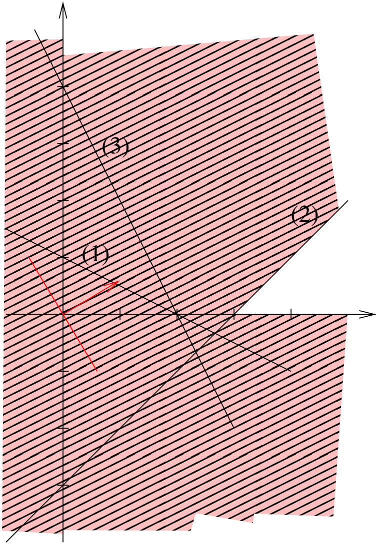
Duala bivillkor 2: $y_1 - y_2 \geq 3$.

LP-dualitet: Exempel



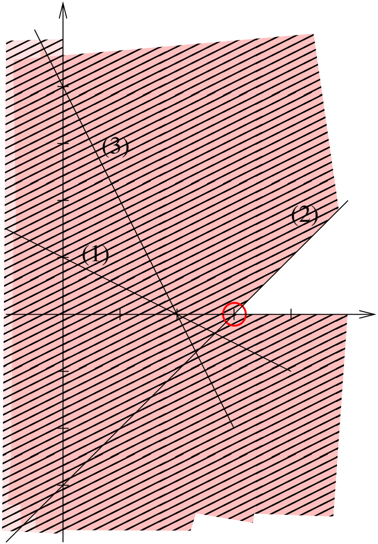
Duala bivillkor 3: $2y_1 + y_2 \geq 4$.

LP-dualitet: Exempel



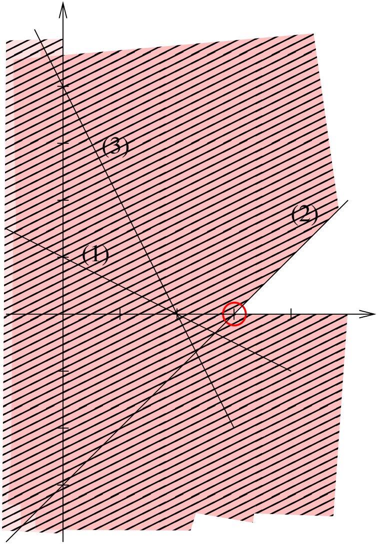
Duala ickenegativitetsvillkor: $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$.

LP-dualitet: Exempel



Dual optimalpunkt: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$.

LP-dualitet: Exempel



Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 54_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) \\
 & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 54_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & \color{red}{(y_1)} \\
& & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & \color{red}{(y_2)} \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & \color{red}{(x_1)} \\
& & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & \color{red}{(x_2)} \\
& & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & \color{red}{(x_3)} \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 54_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrclll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) \\
 & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritetsvillkoren:
Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 54_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & ({y_1}) \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & ({y_2}) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcccl}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & ({x_1}) \\
 & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & ({x_2}) \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & ({x_3}) \\
 & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritetsvillkoren:
Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 54_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & \color{red}{(y_1)} \\
& & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & \color{red}{(y_2)} \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & \color{red}{(x_1)} \\
& & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & \color{red}{(x_2)} \\
& & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & \color{red}{(x_3)} \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritetsvillkoren:
Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$y_1 > 0$

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 54_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llrcrcrll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) \\
 & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritetsvillkoren:
Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$.

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 54_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & \color{red}{(y_1)} \\
& & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & \color{red}{(y_2)} \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & \color{red}{(x_1)} \\
& & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & \color{red}{(x_2)} \\
& & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & \color{red}{(x_3)} \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritetsvillkoren:
Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$. Problemet löst.

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 54_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) \\
 & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritetsvillkoren:
Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$. Problemet löst. (Kolla gärna primala bivillkor 2.)

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 54_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrclll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\
 & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) \\
 & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritetsvillkoren:
Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$. Problemet löst. (Kolla gärna primala bivillkor 2.)

Lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $z = 15$.

LP-dualitet: Exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 54_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & \color{red}{(y_1)} \\
& & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & \color{red}{(y_2)} \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & \color{red}{(x_1)} \\
& & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & \color{red}{(x_2)} \\
& & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & \color{red}{(x_3)} \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritetsvillkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$. Problemet löst. (Kolla gärna primala bivillkor 2.)

Lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $z = 15$. (Kolla gärna z.)

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i.

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i.

Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i.

Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion: $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$.

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i.

Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion: $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$.

Stoppa in dual optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$ ger $v = 3b_1$.

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i.

Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion: $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$.

Stoppa in dual optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$ ger $v = 3b_1$.

En enhets ökning av b_1 ger 3 enheters ökning av v, dvs. z.

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i.

Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion: $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$.

Stoppa in dual optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$ ger $v = 3b_1$.

En enhets ökning av b_1 ger 3 enheters ökning av v, dvs. z.

En enhets ökning av b_2 ger ingen ändring av v, dvs. z.

Skuggpriser

I en viss baslösning har vi $x_B = B^{-1}b$ och $y = {B^{-1}}^T c_B$.

Skuggpriser

I en viss baslösning har vi $x_B = B^{-1}b$ och $y = {B^{-1}}^T c_B$.

Skuggpriserna är oförändrade så länge som B^{-1} och c_B är oförändrade,

Skuggpriser

I en viss baslösning har vi $x_B = B^{-1}b$ och $y = {B^{-1}}^T c_B$.

Skuggpriserna är oförändrade så länge som B^{-1} och c_B är oförändrade, dvs. så länge som samma baslösning är optimal.

Skuggpriser

I en viss baslösning har vi $x_B = B^{-1}b$ och $y = {B^{-1}}^T c_B$.

Skuggpriserna är oförändrade så länge som B^{-1} och c_B är oförändrade, dvs. så länge som samma baslösning är optimal.

Om ändringen i b ger $B^{-1}b \not\geq 0$, ändras optimal baslösning/skuggpriser.

Skuggpriser

I en viss baslösning har vi $x_B = B^{-1}b$ och $y = {B^{-1}}^T c_B$.

Skuggpriserna är oförändrade så länge som B^{-1} och c_B är oförändrade, dvs. så länge som samma baslösning är optimal.

Om ändringen i b ger $B^{-1}b \not\geq 0$, ändras optimal baslösning/skuggpriser.

$B^{-1}b \geq 0$ ger gränser på b för oförändrad optimallösning.

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

Om optimal baslösning inte ändras blir alla förändringar lätta att räkna ut, för då ändras inte B^{-1}.

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

Om optimal baslösning inte ändras blir alla förändringar lätta att räkna ut, för då ändras inte B^{-1}.

Stoppa in nya b och/eller c i $x_B = B^{-1}b$, $y = {B^{-1}}^T c_B$ och $z = c_B^T x_B$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b. Kolla tillåtenhet: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b. Kolla tillåtenhet: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b. Kolla tillåtenhet: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c. Kolla optimalitet. ($=$ dual tillåtenhet)

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b. Kolla tillåtenhet: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c. Kolla optimalitet. ($=$ dual tillåtenhet)
  - För ickebasvariabel, c_N:

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b. Kolla tillåtenhet: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c. Kolla optimalitet. (= dual tillåtenhet)
  - För ickebasvariabel, c_N: $\hat{c}_N = c_N - N^T y^* \leq 0$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b. Kolla tillåtenhet: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c. Kolla optimalitet. (= dual tillåtenhet)
  - För ickebasvariabel, c_N: $\hat{c}_N = c_N - N^T y^* \leq 0$.
    (Ändringen i $\hat{c}$ blir lika stor som ändringen i c.)

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b. Kolla tillåtenhet: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c. Kolla optimalitet. (= dual tillåtenhet)
  - För ickebasvariabel, c_N: $\hat{c}_N = c_N - N^T y^* \leq 0$.
    (Ändringen i $\hat{c}$ blir lika stor som ändringen i c.)
  - För basvariabel, c_B:

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b. Kolla tillåtenhet: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c. Kolla optimalitet. (= dual tillåtenhet)
  - För ickebasvariabel, c_N: $\hat{c}_N = c_N - N^T y^* \leq 0$.
    (Ändringen i $\hat{c}$ blir lika stor som ändringen i c.)
  - För basvariabel, c_B: Beräkna $y = {B^{-1}}^T c_B$ och kolla
    $\hat{c}_N = c_N - N^T y \leq 0$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b. Kolla tillåtenhet: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c. Kolla optimalitet. (= dual tillåtenhet)
  - För ickebasvariabel, c_N: $\hat{c}_N = c_N - N^T y^* \leq 0$.
    (Ändringen i $\hat{c}$ blir lika stor som ändringen i c.)
  - För basvariabel, c_B: Beräkna $y = {B^{-1}}^T c_B$ och kolla
    $\hat{c}_N = c_N - N^T y \leq 0$.
- Addition av nytt bivillkor, $a_i^T x \leq b_i$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b. Kolla tillåtenhet: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c. Kolla optimalitet. (= dual tillåtenhet)
  - För ickebasvariabel, c_N: $\hat{c}_N = c_N - N^T y^* \leq 0$.
    (Ändringen i $\hat{c}$ blir lika stor som ändringen i c.)
  - För basvariabel, c_B: Beräkna $y = {B^{-1}}^T c_B$ och kolla $\hat{c}_N = c_N - N^T y \leq 0$.
- Addition av nytt bivillkor, $a_i^T x \leq b_i$. Kolla tillåtenhet: $a_i^T x^* \leq b_i$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b. Kolla tillåtenhet: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c. Kolla optimalitet. (= dual tillåtenhet)
    - För ickebasvariabel, c_N: $\hat{c}_N = c_N - N^T y^* \leq 0$.
      (Ändringen i $\hat{c}$ blir lika stor som ändringen i c.)
    - För basvariabel, c_B: Beräkna $y = {B^{-1}}^T c_B$ och kolla
      $\hat{c}_N = c_N - N^T y \leq 0$.
- Addition av nytt bivillkor, $a_i^T x \leq b_i$. Kolla tillåtenhet: $a_i^T x^* \leq b_i$.
- Addition av ny variabel, x_k, med kolumn a_k och målfunktionskoefficient c_k.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b. Kolla tillåtenhet: $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c. Kolla optimalitet. (= dual tillåtenhet)
  - För ickebasvariabel, c_N: $\hat{c}_N = c_N - N^T y^* \leq 0$.
    (Ändringen i $\hat{c}$ blir lika stor som ändringen i c.)
  - För basvariabel, c_B: Beräkna $y = {B^{-1}}^T c_B$ och kolla
    $\hat{c}_N = c_N - N^T y \leq 0$.
- Addition av nytt bivillkor, $a_i^T x \leq b_i$. Kolla tillåtenhet: $a_i^T x^* \leq b_i$.
- Addition av ny variabel, x_k, med kolumn a_k och målfunktionskoefficient c_k. Kolla optimalitet: $\hat{c}_k = c_k - a_k^T y^* \leq 0$.

Vårt musexempel

$$
\begin{array}{lrcrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & \color{red}{(y_1)} \quad \text{(knappar)} \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & \color{red}{(y_2)} \quad \text{(optik)} \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & \color{red}{(y_3)} \quad \text{(monteringstid)} \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Vårt musexempel

$$
\begin{array}{llrcrcrll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & \color{red}{(y_1)} \quad \text{(knappar)} \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & \color{red}{(y_2)} \quad \text{(optik)} \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & \color{red}{(y_3)} \quad \text{(monteringstid)} \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrll}
\min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & \color{red}{(x_1)} \quad \text{(Optimus)} \\
& & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & \color{red}{(x_2)} \quad \text{(Rullmus)} \\
& & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

Vårt musexempel

$$\begin{array}{llrcrcrlll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) & \text{(knappar)} \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) & \text{(optik)} \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) & \text{(monteringstid)} \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & &
\end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llrcrcrclll}
\min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & & & \\
\text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & (x_1) \quad \text{(Optimus)} \\
& & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \quad \text{(Rullmus)} \\
& & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & &
\end{array}$$

Optimaltablå:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36.$
Skuggpriser: $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5.$

Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36.$
Skuggpriser: $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5.$

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36.$
Skuggpriser: $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5.$

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Det är en ökning av b_1, så vi tjänar $y_1 = 1/5$ per enhets ökning.

Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36.$
Skuggpriser: $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5.$

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Det är en ökning av b_1, så vi tjänar $y_1 = 1/5$ per enhets ökning.

För hur stor ökning gäller detta?

Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36.$
Skuggpriser: $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5.$

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Det är en ökning av b_1, så vi tjänar $y_1 = 1/5$ per enhets ökning.

För hur stor ökning gäller detta? Kolla $B^{-1}b \geq 0$.

Känslighetsananlys i simplextablån

Kan läsa av B^{-1} under slackvariablerna i optimaltablån.

Känslighetsananlys i simplextablån

Kan läsa av B^{-1} under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Känslighetsananlys i simplextablån

Kan läsa av B^{-1} under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & -3/10 \\ -2/5 & 0 & 3/10 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1/5 - 9 \\ -2b_1/5 + 15 \\ 3b_1/5 - 10 \end{pmatrix} \geq 0$$

Känslighetsananlys i simplextablån

Kan läsa av B^{-1} under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & -3/10 \\ -2/5 & 0 & 3/10 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1/5 - 9 \\ -2b_1/5 + 15 \\ 3b_1/5 - 10 \end{pmatrix} \geq 0$$

vilket ger $22.5 \leq b_1 \leq 37.5$.

Känslighetsananlys i simplextablån

Kan läsa av B^{-1} under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & -3/10 \\ -2/5 & 0 & 3/10 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1/5 - 9 \\ -2b_1/5 + 15 \\ 3b_1/5 - 10 \end{pmatrix} \geq 0$$

vilket ger $22.5 \leq b_1 \leq 37.5$.

Så vi tjänar 1/5 kr per ytterligare knapp, för b_1 upp till 37.5.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6: kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6: kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6: kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):
$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0$.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6: kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):
$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0$.

Slutsats: Låt x_6 förbli noll.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6: kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):
$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0$.

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6: kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0$.

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6: kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):
$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0$.

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm c_6 så att $\hat{c}_6 > 0$:

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6: kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):
$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0$.

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm c_6 så att $\hat{c}_6 > 0$:

$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (1/5 + 3) = c_6 - 3.2 > 0$

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6: kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0$.

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm c_6 så att $\hat{c}_6 > 0$:

$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (1/5 + 3) = c_6 - 3.2 > 0$ om $c_6 > 3.2$.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6: kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5,\ y_2 = 0,\ y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0$.

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm c_6 så att $\hat{c}_6 > 0$:

$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (1/5 + 3) = c_6 - 3.2 > 0$ om $c_6 > 3.2$.

För att få lite marginal sätter man priset så att intäkten blir 3:50 kr.

Känslighetsananlys från koder

Indatafil: (GMPL)

```
var x1 >= 0;
var x2 >= 0;

maximize obj:    4*x1 + 3*x2;
subject to con1: 2*x1 + 3*x2 <= 30;
subject to con2:   x1        <= 6;
subject to con3: 6*x1 + 4*x2 <= 50;
end;
```

Lösning av problemet: Skriv

```
glpsol -m lp-ko1.mod -o lp-ko1.sol
```

Känslighetsananlys från koder

På skärmen (rensat):

```
Reading model section from lp-ko1.mod...
11 lines were read
Model has been successfully generated
GLPK Simplex Optimizer, v4.44
4 rows, 2 columns, 7 non-zeros
Preprocessing...
2 rows, 2 columns, 4 non-zeros
Scaling...
 A: min|aij| =  2.000e+00  max|aij| =  6.000e+00  ratio =  3.000e+00
Problem data seem to be well scaled
Constructing initial basis...
Size of triangular part = 2
*     0: obj =   0.000000000e+00  infeas =  0.000e+00 (0)
*     3: obj =   3.600000000e+01  infeas =  0.000e+00 (0)
OPTIMAL SOLUTION FOUND
Time used:   0.0 secs
Memory used: 0.1 Mb (108000 bytes)
Writing basic solution to 'lp-ko1.sol'...
```

Känslighetsananlys från koder

I utdatafilen lp-ko1.sol (rensat):

```
Problem:    lp
Rows:       4
Columns:    2
Non-zeros:  7
Status:     OPTIMAL
Objective:  obj = 36 (MAXimum)

 No.   Row name   St   Activity   Lower bound  Upper bound  Marginal
--- ------------ -- ----------- ----------- ------------ -----------
  1 obj          B           36
  2 con1         NU          30                        30         0.2
  3 con2         B            3                         6
  4 con3         NU          50                        50         0.6

 No. Column name  St   Activity   Lower bound  Upper bound  Marginal
--- ------------ -- ----------- ----------- ------------- ----------
  1 x1           B            3           0
  2 x2           B            8           0

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:
```

Känslighetsananlys från koder

Lösning av problemet med känslighetsanalys: Skriv

```
glpsol -m lp-ko1.mod --bounds lp-ko1.bnd
```

I utdatafilen lp-ko1.bnd (rensat):

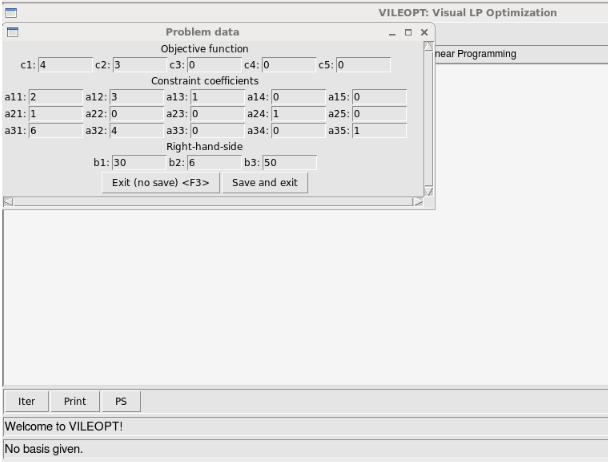
```
GLPK 4.44 - SENSITIVITY ANALYSIS REPORT
Problem:    lpluma
Objective:  obj = 36 (MAXimum)

   No. Row name     St      Activity         Slack   Lower bound       Activity
                                          Marginal   Upper bound          range
------ ------------ -- ------------- ------------- -------------  ------------- ---
     1 obj          BS      36.00000     -36.00000          -Inf       30.00000
                                                .           +Inf       36.00000

     2 con1         NU      30.00000          .             -Inf       22.50000
                                            .20000      30.00000       37.50000

     3 con2         BS       3.00000       3.00000          -Inf          .
                                                .        6.00000        8.33333

     4 con3         NU      50.00000          .             -Inf       40.00000
                                            .60000      50.00000       60.00000
```

Känslighetsananlys från koder

Sida 2 i utdatafilen lp-ko1.bnd (rensat):

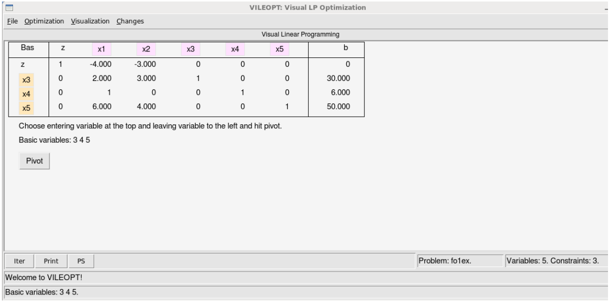
```
GLPK 4.44 - SENSITIVITY ANALYSIS REPORT
Problem:    lpluma
Objective:  obj = 36 (MAXimum)

   No. Column name  St      Activity       Obj coef  Activity       Obj coef  Obj va
                                           Marginal     range          range   break
------ ------------ -- ------------- ------------- ---------- ------------- -------
     1 x1           BS       3.00000       4.00000       -Inf       2.00000      30
                                                .     6.00000       4.50000      37

     2 x2           BS       8.00000       3.00000    3.50000       2.66667      33
                                                .    10.00000       6.00000      60

End of report
```

Vileopt



VILEOPT: Visual LP Optimization
Problem data
Objective function
c1: 4 c2: 3 c3: 0 c4: 0 c5: 0
Constraint coefficients
a11: 2 a12: 3 a13: 1 a14: 0 a15: 0
a21: 1 a22: 0 a23: 0 a24: 1 a25: 0
a31: 6 a32: 4 a33: 0 a34: 0 a35: 1
Right-hand-side
b1: 30 b2: 6 b3: 50
Exit (no save) <F3>
Save and exit
near Programming
Iter
Print
PS
Welcome to VILEOPT!
No basis given.

Vileopt



Bas	z	x1	x2	x3	x4	x5	b
z	1	-4.000	-3.000	0	0	0	0
x3	0	2.000	3.000	1	0	0	30.000
x4	0	1	0	0	1	0	6.000
x5	0	6.000	4.000	0	0	1	50.000

Att tänka på inför lab 1:

Skuggpris? Reducerad kostnad?
Vad händer om man gör fel i simpexmetoden?