

Optimum?

Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell

Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning, x^* , till modellen.

Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning, x^* , till modellen.

Nästan alltid: [Sökmeter](#):

Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning, x^* , till modellen.

Nästan alltid: [Sökmeter](#):

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning, x^* , till modellen.

Nästan alltid: [Sökmeter](#):

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Upprepa, tills punkten är optimal.

Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning, x^* , till modellen.

Nästan alltid: **Sökmeter:**

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Upprepa, tills punkten är optimal.

Metoderna baseras på **matematik**, och vi behöver exakta definitioner.

Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning, x^* , till modellen.

Nästan alltid: **Sökmeter:**

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Upprepa, tills punkten är optimal.

Metoderna baseras på **matematik**, och vi behöver exakta definitioner.

Vad är optimum?

Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning, x^* , till modellen.

Nästan alltid: **Sökmeter:**

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Upprepa, tills punkten är optimal.

Metoderna baseras på **matematik**, och vi behöver exakta definitioner.

Vad är optimum?

Punkten man står i verkar optimal. Är det det?

Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning, x^* , till modellen.

Nästan alltid: **Sökmeter:**

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Upprepa, tills punkten är optimal.

Metoderna baseras på **matematik**, och vi behöver exakta definitioner.

Vad är optimum?

Punkten man står i verkar optimal. Är det det?

Vad kan man förvänta sig av olika metoder?

Optimum?

Optimum?

Globalt minimum: En punkt som är bäst. (rita)

Optimum?

Globalt minimum: En punkt som är bäst. (rita)

Definition

En punkt x^* är **globalt** minimum i X om $f(x^*) \leq f(x)$ för alla $x \in X$.

Optimum?

Globalt minimum: En punkt som är bäst. (rita)

Definition

En punkt x^* är **globalt** minimum i X om $f(x^*) \leq f(x)$ för alla $x \in X$.

Lokalt minimum: En punkt som är bäst för närsynta. (rita)

Optimum?

Globalt minimum: En punkt som är bäst. (rita)

Definition

En punkt x^* är **globalt** minimum i X om $f(x^*) \leq f(x)$ för alla $x \in X$.

Lokalt minimum: En punkt som är bäst för närsynta. (rita)

Definition

En punkt x^* är **lokalt** minimum i X om $f(x^*) \leq f(x)$ för alla $x \in X$ som är nära x^* . (T.ex. för alla $x \in X : \|x - x^*\| \leq \delta$.)

Konvexitet

Konvex mängd:

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Definition

En mängd X är **konvex** om $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$ för alla $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Definition

En mängd X är **konvex** om $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$ för alla $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Definition

En mängd X är **konvex** om $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$ för alla $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Exempel: Halvrum.

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Definition

En mängd X är **konvex** om $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$ för alla $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Definition

En mängd X är **konvex** om $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$ för alla $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.

Kombinerade mängder:

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Definition

En mängd X är **konvex** om $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$ för alla $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.

Kombinerade mängder: Snittet av konvexa mängder är konvext. (rita)

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Definition

En mängd X är **konvex** om $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$ för alla $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.

Kombinerade mängder: Snittet av konvexa mängder är konvext. (rita)

Sats

Om X_i är konvex för alla i så är $X = \cap_i X_i$ konvex.

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Definition

En mängd X är **konvex** om $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$ för alla $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.

Kombinerade mängder: Snittet av konvexa mängder är konvext. (rita)

Sats

Om X_i är konvex för alla i så är $X = \cap_i X_i$ konvex.

Exempel: Flera halvrum.

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Definition

En mängd X är **konvex** om $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$ för alla $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.

Kombinerade mängder: Snittet av konvexa mängder är konvext. (rita)

Sats

Om X_i är konvex för alla i så är $X = \cap_i X_i$ konvex.

Exempel: Flera halvrum. Flera linjära bivillkor.

Extrempunkt

Konvexkombination:

Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

Definition

\hat{x} är en **konvexkombination** av punkterna $x^{(k)}$, $k = 1, \dots, p$, om $\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}$, där $\sum_k \lambda_k = 1$ och $\lambda_k \geq 0$ för alla k .

Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

Definition

\hat{x} är en **konvexkombination** av punkterna $x^{(k)}$, $k = 1, \dots, p$, om $\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}$, där $\sum_k \lambda_k = 1$ och $\lambda_k \geq 0$ för alla k .

Exempel: Mittpunkt.

Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

Definition

\hat{x} är en **konvexkombination** av punkterna $x^{(k)}$, $k = 1, \dots, p$, om

$$\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}, \text{ där } \sum_k \lambda_k = 1 \text{ och } \lambda_k \geq 0 \text{ för alla } k.$$

Exempel: Mittpunkt. $\lambda_k = 1/p$.

Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

Definition

\hat{x} är en **konvexkombination** av punkterna $x^{(k)}$, $k = 1, \dots, p$, om $\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}$, där $\sum_k \lambda_k = 1$ och $\lambda_k \geq 0$ för alla k .

Exempel: Mittpunkt. $\lambda_k = 1/p$.

Extrempunkt:

Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

Definition

\hat{x} är en **konvexkombination** av punkterna $x^{(k)}$, $k = 1, \dots, p$, om $\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}$, där $\sum_k \lambda_k = 1$ och $\lambda_k \geq 0$ för alla k .

Exempel: Mittpunkt. $\lambda_k = 1/p$.

Extrempunkt: En punkt som **inte** är en konvexkombination av två andra tillåtna punkter.

Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

Definition

\hat{x} är en **konvexkombination** av punkterna $x^{(k)}$, $k = 1, \dots, p$, om

$$\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}, \text{ där } \sum_k \lambda_k = 1 \text{ och } \lambda_k \geq 0 \text{ för alla } k.$$

Exempel: Mittpunkt. $\lambda_k = 1/p$.

Extrempunkt: En punkt som **inte** är en konvexkombination av två andra tillåtna punkter. Hörn. (rita)

Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

Definition

\hat{x} är en **konvexkombination** av punkterna $x^{(k)}$, $k = 1, \dots, p$, om $\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}$, där $\sum_k \lambda_k = 1$ och $\lambda_k \geq 0$ för alla k .

Exempel: Mittpunkt. $\lambda_k = 1/p$.

Extrempunkt: En punkt som **inte** är en konvexkombination av två andra tillåtna punkter. Hörn. (rita)

Definition

\hat{x} är en **extrempunkt** i X om $\hat{x} = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}$, där $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$ och $0 < \lambda < 1$, endast är möjligt om $x^{(1)} = x^{(2)}$.

Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

Definition

\hat{x} är en **konvexkombination** av punkterna $x^{(k)}$, $k = 1, \dots, p$, om $\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}$, där $\sum_k \lambda_k = 1$ och $\lambda_k \geq 0$ för alla k .

Exempel: Mittpunkt. $\lambda_k = 1/p$.

Extrempunkt: En punkt som **inte** är en konvexkombination av två andra tillåtna punkter. Hörn. (rita)

Definition

\hat{x} är en **extrempunkt** i X om $\hat{x} = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}$, där $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$ och $0 < \lambda < 1$, endast är möjligt om $x^{(1)} = x^{(2)}$.

Exempel: Origo (under bivillkoren $x_i \geq 0$ för alla i).

Konvexa höljet

Konvexa höljet: Alla konvexkombinationer. (rita)

Konvexa höljet

Konvexa höljet: Alla konvexkombinationer. (rita)

Sats/Definition

För en begränsad mängd S består $\text{conv}(S)$ av alla konvexkombinationer av punkter i S .

Konvexa höljet

Konvexa höljet: Alla konvexkombinationer. (rita)

Sats/Definition

För en begränsad mängd S består $\text{conv}(S)$ av alla konvexkombinationer av punkter i S .

Konvexa höljet av S är den *minsta konvexa mängden* som innehåller S .

Konvexa höljet

Konvexa höljet: Alla konvexkombinationer. (rita)

Sats/Definition

För en begränsad mängd S består $\text{conv}(S)$ av alla konvexkombinationer av punkter i S .

Konvexa höljet av S är den *minsta konvexa mängden* som innehåller S .

Definition

Skärningen av alla konvexa mängder som innehåller en viss mängd S kallas **det konvexa höljet** av S och betecknas med $\text{conv}(S)$.

Konvexa höljet

Konvexa höljet: Alla konvexkombinationer. (rita)

Sats/Definition

För en begränsad mängd S består $\text{conv}(S)$ av alla konvexkombinationer av punkter i S .

Konvexa höljet av S är den *minsta konvexa mängden* som innehåller S .

Definition

Skärningen av alla konvexa mängder som innehåller en viss mängd S kallas **det konvexa höljet** av S och betecknas med $\text{conv}(S)$.

Exempel: $S = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$.

Konvexa höljet

Konvexa höljet: Alla konvexkombinationer. (rita)

Sats/Definition

För en begränsad mängd S består $\text{conv}(S)$ av alla konvexkombinationer av punkter i S .

Konvexa höljet av S är den *minsta konvexa mängden* som innehåller S .

Definition

Skärningen av alla konvexa mängder som innehåller en viss mängd S kallas **det konvexa höljet** av S och betecknas med $\text{conv}(S)$.

Exempel: $S = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$.

$\text{conv}(S)$ ges av $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 1$.

Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel: $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel: $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel: $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $Ax \leq b$.

Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel: $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $Ax \leq b$.

Exempel: $Ax = b$, $x \geq 0$.

Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel: $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $Ax \leq b$.

Exempel: $Ax = b$, $x \geq 0$.

En polyeder har **ändligt** många extrempunkter.

Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel: $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $Ax \leq b$.

Exempel: $Ax = b$, $x \geq 0$.

En polyeder har **ändligt** många extrempunkter.

Varför är konvexitet intressant?

Polyeder

Mängd med “raka kanter”.

Polyeder: (rita)

Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel: $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exempel: $Ax \leq b$.

Exempel: $Ax = b$, $x \geq 0$.

En polyeder har **ändligt** många extrempunkter.

Varför är konvexitet intressant?

Ett lokalt optimum i ett konvext problem är alltid ett globalt optimum!

LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \quad \text{då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \quad \text{då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder och konvex. Målfunktionen är linjär.

LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \quad \text{då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder och konvex. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \quad \text{då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder och konvex. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

Konstant lutning på målfunktionen.

LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \quad \text{då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder och konvex. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

Konstant lutning på målfunktionen. Gå så långt man får åt något håll.

LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \quad \text{då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder och konvex. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

Konstant lutning på målfunktionen. Gå så långt man får åt något håll. \Rightarrow Hörn.

LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \text{ då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder och konvex. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

Konstant lutning på målfunktionen. Gå så långt man får åt något håll. \Rightarrow Hörn.

Sats (Linjärprogrammeringens fundamentalsats)

Om ett LP-problem har begränsad optimallösning, så antas den i (minst) en extrempunkt.

Vårt första exempel

Variabeldefinition:

x_1 = antal enheter Optimus som görs varje timme.

x_2 = antal enheter Rullmus som görs varje timme.

Matematisk modell:

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (\text{knappar}) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (\text{optik}) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (\text{monteringstid}) \\ & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) & \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & (5) & \end{array}$$

Baslösningar representerar extrempunkter

Baslösningar representerar extrempunkter

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & (5) \end{array}$$

Baslösningar representerar extrempunkter

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & (5) \end{array}$$

Inför slackvariabler.

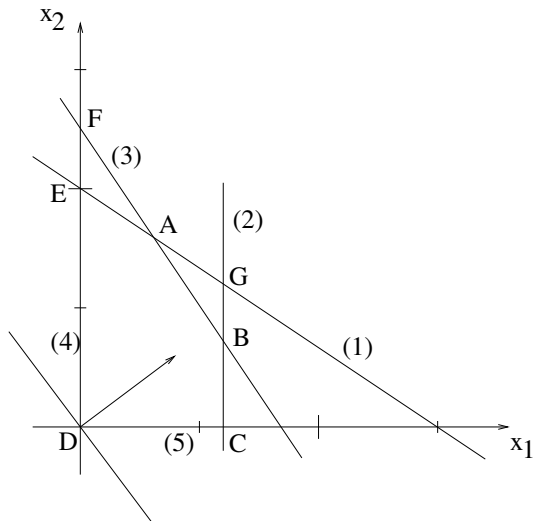
Baslösningar representerar extrempunkter

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & (5) \end{array}$$

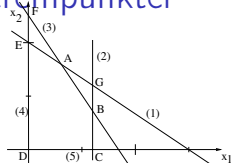
Inför slackvariabler.

$$\begin{array}{rcllclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Baslösningar representerar extrempunkter

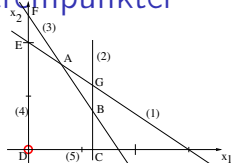


Baslösningar representerar extrempunkter



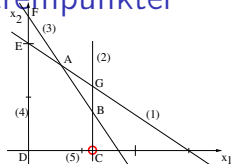
Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut

Baslösningar representerar extrempunkter



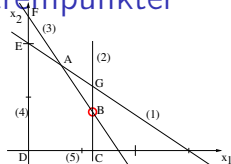
Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$

Baslösningar representerar extrempunkter



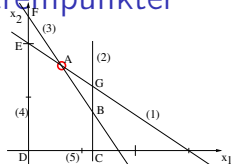
Hörnpunkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$

Bäslösningar representerar extrempunkter



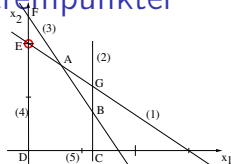
Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$

Baslösningar representerar extrempunkter



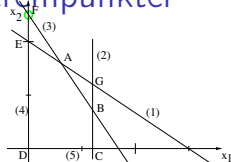
Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$

Baslösningar representerar extrempunkter



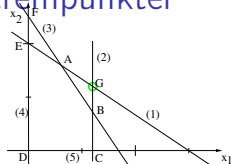
Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$

Baslösningar representerar extrempunkter



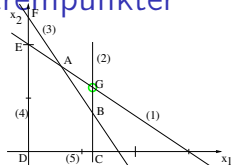
Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$
F	3,4	$x_1 = 0, x_5 = 0$	$x_2 = 25/2, x_3 = -15/2, x_4 = 6$

Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$
F	3,4	$x_1 = 0, x_5 = 0$	$x_2 = 25/2, x_3 = -15/2, x_4 = 6$
G	1,2	$x_3 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 6, x_5 = -10$

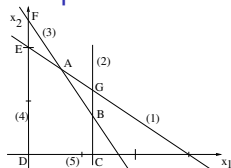
Baslösningar representerar extrempunkter



Hörnpunkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$
F	3,4	$x_1 = 0, x_5 = 0$	$x_2 = 25/2, x_3 = -15/2, x_4 = 6$
G	1,2	$x_3 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 6, x_5 = -10$

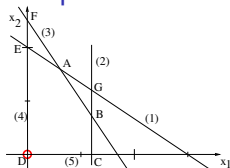
Punkt F och G ej tillåtna, ty negativa variabelvärden.

Baslösningar representerar extrempunkter



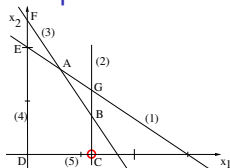
Hörn-punkt	Icke-bas-variabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion

Baslösningar representerar extrempunkter



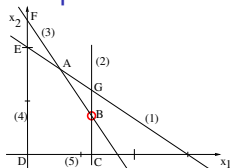
Hörnpunkt	Ickebasvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
D	x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$z = 4x_1 + 3x_2$

Baslösningar representerar extrempunkter



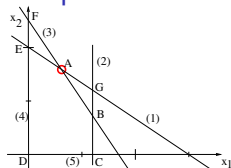
Hörnpunkt	Ickebasvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
C	x_2, x_4	x_1, x_3, x_5	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$z = 4x_1 + 3x_2$

Baslösningar representerar extrempunkter



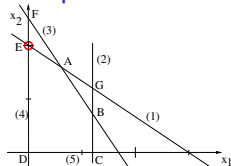
Hörnpunkt	Ickebasvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
B	x_4, x_5	x_1, x_2, x_3	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	x_2, x_4	x_1, x_3, x_5	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$z = 4x_1 + 3x_2$

Baslösningar representerar extrempunkter



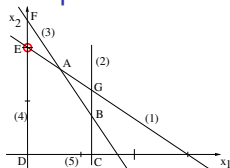
Hörnpunkt	Ickebasvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
A	x_3, x_5	x_1, x_2, x_4	$z = 36 - 1/5x_3 - 3/5x_5$
B	x_4, x_5	x_1, x_2, x_3	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	x_2, x_4	x_1, x_3, x_5	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$z = 4x_1 + 3x_2$

Baslösningar representerar extrempunkter



Hörnpunkt	Ickebasvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
A	x_3, x_5	x_1, x_2, x_4	$z = 36 - 1/5x_3 - 3/5x_5$
B	x_4, x_5	x_1, x_2, x_3	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	x_2, x_4	x_1, x_3, x_5	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$z = 4x_1 + 3x_2$
E	x_1, x_3	x_2, x_4, x_5	$z = 30 + 2x_1 - x_3$

Baslösningar representerar extrempunkter



Hörnpunkt	Ickebasvariabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
A	x_3, x_5	x_1, x_2, x_4	$z = 36 - 1/5x_3 - 3/5x_5$
B	x_4, x_5	x_1, x_2, x_3	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	x_2, x_4	x_1, x_3, x_5	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$z = 4x_1 + 3x_2$
E	x_1, x_3	x_2, x_4, x_5	$z = 30 + 2x_1 - x_3$

Punkt A optimal, ty negativa reducerade kostnader.

Baslösningar, hur byta

Baslösningar, hur byta

- Byt en basvariabel i taget.

Baslösningar, hur byta

- Byt en basvariabel i taget.
- Öka ickebasvariabel med positiv reducerad kostnad. (Ökar z .)

Baslösningar, hur byta

- Byt en basvariabel i taget.
- Öka ickebasvariabel med positiv reducerad kostnad. (Ökar z .)
- Gör ökningen så stor som möjligt,

Baslösningar, hur byta

- Byt en basvariabel i taget.
- Öka ickebasvariabel med positiv reducerad kostnad. (Ökar z .)
- Gör ökningen så stor som möjligt,
dvs. så att en basvariabel blir noll och ingen negativ.

Exempel

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1 + x_4 = 6$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_5 = 50$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 .

Exempel

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1 + x_4 = 6$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_5 = 50$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 . Dvs. $x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$.

Exempel

$$\begin{array}{rcccccccc} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & = 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & & = 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 = 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 \geq 0 \end{array}$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 . Dvs. $x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t, x_2 = 0$, vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 . Dvs. $x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t, x_2 = 0$, vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t$$

Exempel

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{då } 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1 + x_4 = 6$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_5 = 50$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 . Dvs. $x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t, x_2 = 0$, vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0$$

Exempel

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30$$

$$x_1 + x_4 = 6$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_5 = 50$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 . Dvs. $x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t, x_2 = 0$, vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

Exempel

$$\begin{aligned}\max \quad z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 30 \\ x_1 + x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_5 &= 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0\end{aligned}$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 . Dvs. $x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t, x_2 = 0$, vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t$$

Exempel

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 . Dvs. $x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t, x_2 = 0$, vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t \geq 0$$

Exempel

$$\begin{array}{rclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & = 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & & = 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 = 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 \geq 0 \end{array}$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 . Dvs. $x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t, x_2 = 0$, vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50/6 \approx 8.333$$

Exempel

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & = 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & & = 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 = 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 \geq 0 \end{array}$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 . Dvs. $x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t, x_2 = 0$, vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50/6 \approx 8.333$$

Ger $t = 6$,

Exempel

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 . Dvs. $x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t, x_2 = 0$, vilket ger

$$2t + x_3 = 30$$

$$t + x_4 = 6$$

$$6t + x_5 = 50$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50/6 \approx 8.333$$

Ger $t = 6$, dvs. $x_1 = 6$

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**,

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**,
sätta **icke-basvariablerna** till noll,

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**,
sätta **icke-basvariablerna** till noll,
och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet $Ax = b$.

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**,
sätta **icke-basvariablerna** till noll,
och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet $Ax = b$.
Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**,

sätta **icke-basvariablerna** till noll,

och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet $Ax = b$.

Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

$$x = (x_B, x_N), A = (B \ N). Bx_B + Nx_N = b \text{ ger } x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**,

sätta **icke-basvariablerna** till noll,

och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet $Ax = b$.

Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

$x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$. $Bx_B + Nx_N = b$ ger $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.

Eliminera x_B från målfunktionen: $z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**,

sätta **icke-basvariablerna** till noll,

och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet $Ax = b$.

Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

$x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$. $Bx_B + Nx_N = b$ ger $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.

Eliminera x_B från målfunktionen: $z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$

där $\hat{z} = c_B^T B^{-1}b$ och $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1}N)^T$.

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**,

sätta **icke-basvariablerna** till noll,

och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet $Ax = b$.

Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

$x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$. $Bx_B + Nx_N = b$ ger $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.

Eliminera x_B från målfunktionen: $z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$

där $\hat{z} = c_B^T B^{-1}b$ och $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1}N)^T$.

\hat{c}_N kallas **reducerade kostnader**.

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**,

sätta **icke-basvariablerna** till noll,

och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet $Ax = b$.

Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

$x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$. $Bx_B + Nx_N = b$ ger $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.

Eliminera x_B från målfunktionen: $z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$

där $\hat{z} = c_B^T B^{-1}b$ och $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1}N)^T$.

\hat{c}_N kallas **reducerade kostnader**. Baslösningen som fås för $x_N = 0$ och

$x_B = B^{-1}b$ är **tillåten** om $B^{-1}b \geq 0$ och **optimal** om $\hat{c}_N \leq 0$.

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**,

sätta **icke-basvariablerna** till noll,

och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet $Ax = b$.

Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

$x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$. $Bx_B + Nx_N = b$ ger $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.

Eliminera x_B från målfunktionen: $z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$

där $\hat{z} = c_B^T B^{-1}b$ och $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1}N)^T$.

\hat{c}_N kallas **reducerade kostnader**. Baslösningen som fås för $x_N = 0$ och

$x_B = B^{-1}b$ är **tillåten** om $B^{-1}b \geq 0$ och **optimal** om $\hat{c}_N \leq 0$.

Sats

Varje extrempunkt i en polyeder kan definieras av (minst) en tillåten baslösning.

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås:

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad, $\max_j \hat{c}_j$.

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad, $\max_j \hat{c}_j$. (för max-problem)

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad, $\max_j \hat{c}_j$. (för max-problem)

Om $\hat{c}_j \leq 0$ för all j : Stopp, optimum funnet.

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad, $\max_j \hat{c}_j$. (för max-problem)

Om $\hat{c}_j \leq 0$ för all j : Stopp, optimum funnet.

2. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls:

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad, $\max_j \hat{c}_j$. (för max-problem)

Om $\hat{c}_j \leq 0$ för all j : Stopp, optimum funnet.

2. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls: Minst kvot mellan högerled och positiv koefficient i inkommande kolumn, $\min_{i:\hat{a}_{ij}>0} \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \right)$.

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad, $\max_j \hat{c}_j$. (för max-problem)

Om $\hat{c}_j \leq 0$ för all j : Stopp, optimum funnet.

2. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls: Minst kvot mellan högerled och positiv koefficient i inkommande kolumn, $\min_{i:\hat{a}_{ij}>0} \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \right)$.

Om $\hat{a}_{ij} \leq 0$ för alla i : Stopp, lösningen är obegränsad.

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad, $\max_j \hat{c}_j$. (för max-problem)

Om $\hat{c}_j \leq 0$ för all j : Stopp, optimum funnet.

2. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls: Minst kvot mellan högerled och positiv koefficient i inkommande kolumn, $\min_{i:\hat{a}_{ij}>0} \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \right)$.

Om $\hat{a}_{ij} \leq 0$ för alla i : Stopp, lösningen är obegränsad.

3. Byt bas (pivotera): Eliminera inkommande variabel från alla andra rader. Gå till 1.

Löst exempel

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Löst exempel

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Inför slackvariabler, x_3 , x_4 , x_5 .

Löst exempel

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Inför slackvariabler, x_3 , x_4 , x_5 .

$$\begin{array}{rcllclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Simplexmetoden

$$\begin{array}{rcllclclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttablå:

Simplexmetoden

$$\begin{array}{rcllclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttablå:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	-4	-3	0	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	0	30
x_4	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	6	4	0	0	1	50

Simplexmetoden

$$\begin{array}{rcllclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttablå:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	-4	-3	0	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	0	30
x_4	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	6	4	0	0	1	50

Inkommande variabel: x_1 .

Simplexmetoden

$$\begin{array}{rcllclclcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & & + & x_4 & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Starttablå:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	-4	-3	0	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	0	30
x_4	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	6	4	0	0	1	50

Inkommande variabel: x_1 . Utgående variabel: x_4 .

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	-3	0	4	0	24
x_3	0	0	3	1	-2	0	18
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	0	4	0	-6	1	14

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	-3	0	4	0	24
x_3	0	0	3	1	-2	0	18
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel: x_2 .

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	-3	0	4	0	24
x_3	0	0	3	1	-2	0	18
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel: x_2 . Utgående variabel: x_5 .

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	-3	0	4	0	24
x_3	0	0	3	1	-2	0	18
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel: x_2 . Utgående variabel: x_5 .

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	0	-1/2	3/4	69/2
x_3	0	0	0	1	5/2	-3/4	15/2
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_2	0	0	1	0	-3/2	1/4	7/2

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	-3	0	4	0	24
x_3	0	0	3	1	-2	0	18
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel: x_2 . Utgående variabel: x_5 .

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	0	-1/2	3/4	69/2
x_3	0	0	0	1	5/2	-3/4	15/2
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_2	0	0	1	0	-3/2	1/4	7/2

Inkommande variabel: x_4 .

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	-3	0	4	0	24
x_3	0	0	3	1	-2	0	18
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel: x_2 . Utgående variabel: x_5 .

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	0	-1/2	3/4	69/2
x_3	0	0	0	1	5/2	-3/4	15/2
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_2	0	0	1	0	-3/2	1/4	7/2

Inkommande variabel: x_4 . Utgående variabel: x_3 .

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
x_4	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
x_1	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
x_2	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
x_4	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
x_1	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
x_2	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

Ingen inkommande variabel.

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
x_4	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
x_1	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
x_2	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

Ingen inkommande variabel. Optimaltablå.

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
x_4	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
x_1	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
x_2	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

Ingen inkommande variabel. Optimaltablå.

Optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 36$.

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
x_4	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
x_1	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
x_2	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

Ingen inkommande variabel. Optimaltablå.

Optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 36$.

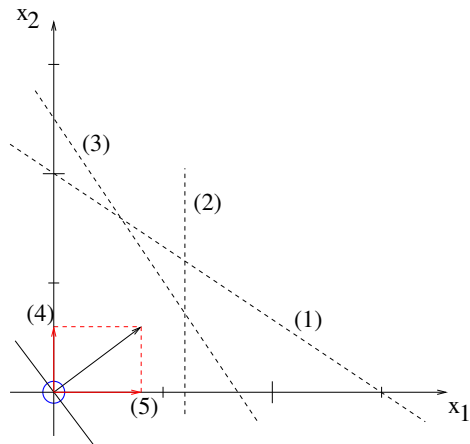
Slack:

Villkor 1 aktivt ($x_3 = 0$).

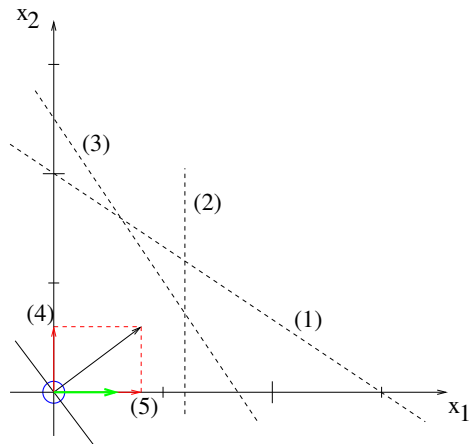
Villkor 2 ej aktivt ($x_4 = 3$).

Villkor 3 aktivt ($x_5 = 0$).

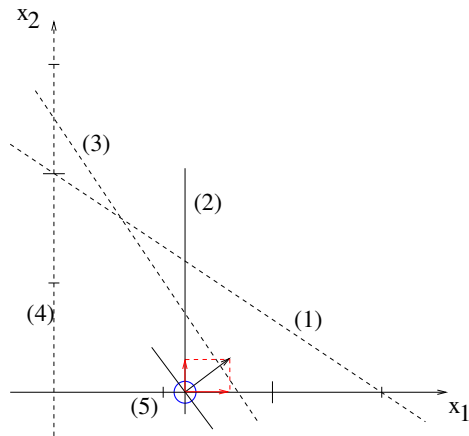
Simplexmetoden



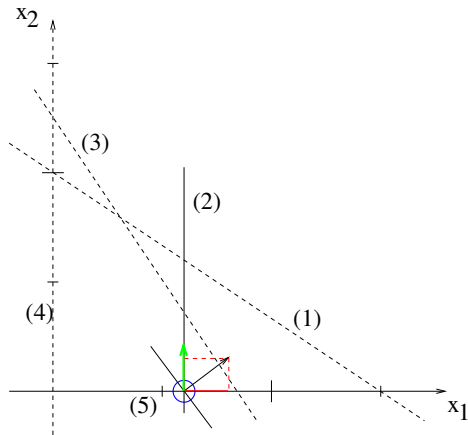
Simplexmetoden



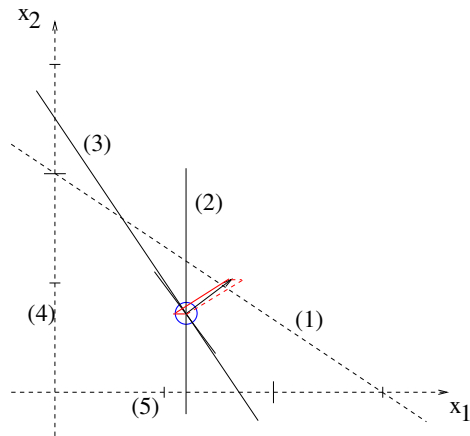
Simplexmetoden



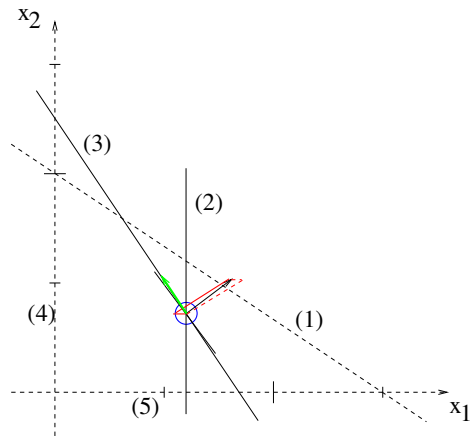
Simplexmetoden



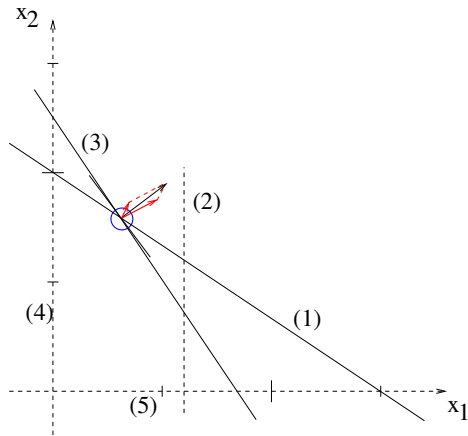
Simplexmetoden



Simplexmetoden



Simplexmetoden



Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.

1. Beräkna B^{-1} .

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.

1. Beräkna B^{-1} .

2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$.

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.

1. Beräkna B^{-1} .

2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1} .
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1} .
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1} .
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.
5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1} .
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.
5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$ (dvs $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$).

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1} .
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.
5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$ (dvs $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$).
6. Om $\hat{c}_N \leq 0$: Stopp, optimum.

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1} .
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.
5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$ (dvs $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$).
6. Om $\hat{c}_N \leq 0$: Stopp, optimum.
7. Välj **inkommande** variabel x_k så att **förbättring** fås:

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1} .
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.
5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$ (dvs $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$).
6. Om $\hat{c}_N \leq 0$: Stopp, optimum.
7. Välj **inkommande** variabel x_k så att **förbättring** fås: $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$.

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1} .
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.
5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$ (dvs $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$).
6. Om $\hat{c}_N \leq 0$: Stopp, optimum.
7. Välj **inkommande** variabel x_k så att **förbättring** fås: $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$.
8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas: $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$.

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1} .
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.
5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$ (dvs $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$).
6. Om $\hat{c}_N \leq 0$: Stopp, optimum.
7. Välj **inkommande** variabel x_k så att **förbättring** fås: $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$.
8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas: $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$.
9. Om $\hat{a}_k \leq 0$: Stopp, problemet har obegränsad lösning.

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1} .
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.
5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$ (dvs $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$).
6. Om $\hat{c}_N \leq 0$: Stopp, optimum.
7. Välj **inkommande** variabel x_k så att **förbättring** fås: $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$.
8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas: $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$.
9. Om $\hat{a}_k \leq 0$: Stopp, problemet har obegränsad lösning.
10. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls:

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1} .
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.
5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$ (dvs $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$).
6. Om $\hat{c}_N \leq 0$: Stopp, optimum.
7. Välj **inkommande** variabel x_k så att **förbättring** fås: $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$.
8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas: $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$.
9. Om $\hat{a}_k \leq 0$: Stopp, problemet har obegränsad lösning.
10. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls: $\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min_{i: \hat{a}_{ik} > 0} \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \right)$.

Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$, $c = (c_B, c_N)$.
1. Beräkna B^{-1} .
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}$, $x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.
5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$ (dvs $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$).
6. Om $\hat{c}_N \leq 0$: Stopp, optimum.
7. Välj **inkommande** variabel x_k så att **förbättring** fås: $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$.
8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas: $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$.
9. Om $\hat{a}_k \leq 0$: Stopp, problemet har obegränsad lösning.
10. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls: $\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min_{i: \hat{a}_{ik} > 0} \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \right)$.
11. Byt bas: Uppdatera B , N , c_B och c_N . Gå till 1.

Simplextablån, teoretiskt

$$\max \quad z = c^T x$$

$$\text{då} \quad Ax + Ix_S = b$$

$$x, x_S \geq 0$$

Simplextablån, teoretiskt

$$\max z = c^T x$$

$$\text{då} \quad Ax + Ix_S = b$$

$$x, x_S \geq 0$$

Bas	z	x	x_S	\hat{b}
z	1	$-c^T$	$\mathbf{0}$	0
x_S	$\mathbf{0}$	A	I	b

(Starttablå)

Simplextablån, teoretiskt

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ \text{då} \quad & Ax + Ix_S = b \\ & x, x_S \geq 0 \end{aligned}$$

Bas	z	x	x_S	\hat{b}
z	1	$-c^T$	$\mathbf{0}$	0
x_S	$\mathbf{0}$	A	I	b

(Starttablå)

Bas	z	x	x_S	\hat{b}
z	1	$c_B^T B^{-1} A - c^T$	$c_B^T B^{-1}$	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	$\mathbf{0}$	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$

(Optimaltablå)

Simplextablån, teoretiskt

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ \text{då} \quad & Ax + Ix_S = b \\ & x, x_S \geq 0 \end{aligned}$$

Bas	z	x	x_S	\hat{b}
z	1	$-c^T$	$\mathbf{0}$	0
x_S	$\mathbf{0}$	A	I	b

(Starttablå)

Bas	z	x	x_S	\hat{b}
z	1	$c_B^T B^{-1} A - c^T$	$c_B^T B^{-1}$	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	$\mathbf{0}$	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$

(Optimaltablå)

B^{-1} kan läsas ut ut optimaltablån.

Simplextablån, teoretiskt

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ \text{då} \quad & Ax + Ix_S = b \\ & x, x_S \geq 0 \end{aligned}$$

Bas	z	x	x_S	\hat{b}
z	1	$-c^T$	$\mathbf{0}$	0
x_S	$\mathbf{0}$	A	I	b

(Starttablån)

Bas	z	x	x_S	\hat{b}
z	1	$c_B^T B^{-1} A - c^T$	$c_B^T B^{-1}$	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	$\mathbf{0}$	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$

(Optimaltablån)

B^{-1} kan läsas ut ut optimaltablån.

Och $c_B^T B^{-1}$.

Degeneration och konvergens

Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Degeneration och konvergens

Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.

Degeneration och konvergens

Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.
- Varje iteration i simplexmetoden ger ett positivt värde på inkommande variabel, och en strikt förbättring i målfunktionsvärde.

Degeneration och konvergens

Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.
- Varje iteration i simplexmetoden ger ett positivt värde på inkommande variabel, och en strikt förbättring i målfunktionsvärde.
- Man kan därför aldrig komma tillbaka till en redan besökt extrempunkt.

Degeneration och konvergens

Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.
- Varje iteration i simplexmetoden ger ett positivt värde på inkommande variabel, och en strikt förbättring i målfunktionsvärde.
- Man kan därför aldrig komma tillbaka till en redan besökt extrempunkt.
- Det finns ändligt många extrempunkter, så detta kan bara upprepas ett ändligt antal gånger.

Degeneration och konvergens

Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

Degeneration och konvergens

Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning: $\hat{b}_i = 0$.

Degeneration och konvergens

Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning: $\hat{b}_i = 0$.

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

Degeneration och konvergens

Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning: $\hat{b}_i = 0$.

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

Om flera basvariabler är noll: Många iterationer i samma punkt. Ingen förbättring. Samma bas *kan* återkomma.

Degeneration och konvergens

Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning: $\hat{b}_i = 0$.

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

Om flera basvariabler är noll: Många iterationer i samma punkt. Ingen förbättring. Samma bas *kan* återkomma.

Om samma bas återkommer: Cykling!

Degeneration och konvergens

Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke-tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning: $\hat{b}_i = 0$.

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

Om flera basvariabler är noll: Många iterationer i samma punkt. Ingen förbättring. Samma bas *kan* återkomma.

Om samma bas återkommer: Cykling!

Cykling kan förhindras genom speciella val av inkommande och utgående variabler.

Västa fall för simplexmetoden

Berömt exempel: Klee-Minty (1972)

$$\max z = 10x_1 + 3x_2$$

$$\text{då} \quad x_1 \leq 1$$

$$20x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Västa fall för simplexmetoden

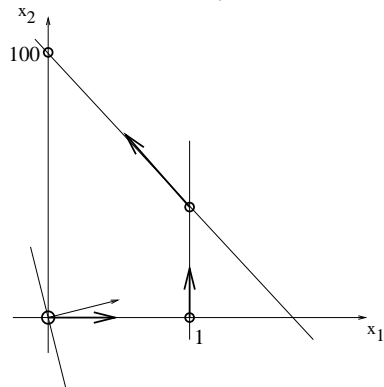
Berömt exempel: Klee-Minty (1972)

$$\max z = 10x_1 + 3x_2$$

$$\text{då} \quad x_1 \leq 1$$

$$20x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Västa fall för simplexmetoden

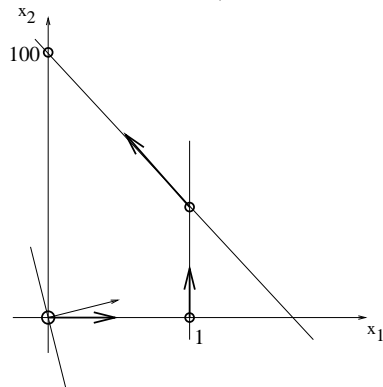
Berömt exempel: Klee-Minty (1972)

$$\max z = 10x_1 + 3x_2$$

$$\text{då} \quad x_1 \leq 1$$

$$20x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Besöker *alla* extrempunkter.

Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler, n .

$$\max z = \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j$$

$$\text{då } 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i \leq 100^{i-1} \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler, n .

$$\max z = \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j$$

$$\text{då } 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i \leq 100^{i-1} \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Simplexmetoden kräver $2^n - 1$ iterationer.

Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler, n .

$$\max z = \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j$$

$$\text{då } 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i \leq 100^{i-1} \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Simplexmetoden kräver $2^n - 1$ iterationer.

Varje iteration kräver $O(m^2)$ (uppdatering av B^{-1}).

Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler, n .

$$\max z = \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j$$

$$\text{då } 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i \leq 100^{i-1} \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Simplexmetoden kräver $2^n - 1$ iterationer.

Varje iteration kräver $O(m^2)$ (uppdatering av B^{-1}).

Empiriskt: I medel m^3 iterationer för verkliga problem.

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

y har längden m .

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

y har längden m .

x_B har längden m .

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

y har längden m .

x_B har längden m .

Men x_N och \hat{c}_N är väldigt långa.

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

y har längden m .

x_B har längden m .

Men x_N och \hat{c}_N är väldigt långa. N är jättestor.

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

y har längden m .

x_B har längden m .

Men x_N och \hat{c}_N är väldigt långa. N är jättestor.

Var smart: Läs in a_j och beräkna $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ för ett j åt gången.

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

y har längden m .

x_B har längden m .

Men x_N och \hat{c}_N är väldigt långa. N är jättestor.

Var smart: Läs in a_j och beräkna $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ för ett j åt gången.

Släng de som inte blir inkommande, $\hat{c}_j \leq 0$.

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

y har längden m .

x_B har längden m .

Men x_N och \hat{c}_N är väldigt långa. N är jättestor.

Var smart: Läs in a_j och beräkna $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ för ett j åt gången.

Släng de som inte blir inkommande, $\hat{c}_j \leq 0$.

Tag första x_j med $\hat{c}_j > 0$ som inkommande.

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

y har längden m .

x_B har längden m .

Men x_N och \hat{c}_N är väldigt långa. N är jättestor.

Var smart: Läs in a_j och beräkna $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ för ett j åt gången.

Släng de som inte blir inkommande, $\hat{c}_j \leq 0$.

Tag första x_j med $\hat{c}_j > 0$ som inkommande.

Resultat: Vi behöver aldrig spara något jättestort.

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

y har längden m .

x_B har längden m .

Men x_N och \hat{c}_N är väldigt långa. N är jättestor.

Var smart: Läs in a_j och beräkna $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ för ett j åt gången.

Släng de som inte blir inkommande, $\hat{c}_j \leq 0$.

Tag första x_j med $\hat{c}_j > 0$ som inkommande.

Resultat: Vi behöver aldrig spara något jättestort.

Kan lösa problem som är så stora att vi inte får plats med hela problemet i minnet.