

Vårt första exempel

Variabeldefinition:

x_1 = antal enheter Optimus som görs varje timme.

x_2 = antal enheter Rullmus som görs varje timme.

Matematisk modell:

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (\text{knappar}) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (\text{optik}) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (\text{monteringstid}) \\ & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) & \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & (5) & \end{array}$$

LP-dualitet: Exempel

Primal:

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten,

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i .

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i .

LP-dual:

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna.

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

$$\begin{array}{rcllcl} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq 4 \quad (1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq 3 \quad (2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq 0 \end{array}$$

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

$$\begin{array}{rcllcl} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq 4 \quad (1) \quad (x_1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq 0 \end{array}$$

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

$$\begin{array}{rcllcl} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq 4 \quad (1) \quad (x_1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq 0 \end{array}$$

Komplementaritetsvillkoren:

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \quad (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \quad (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \quad (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

$$\begin{array}{rcllcl} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq 4 \quad (1) \quad (x_1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq 0 \end{array}$$

Komplementaritetsvillkoren:

Priset är noll om råvaran inte används fullt ut.

LP-dualitet: Exempel

Primal: Maximera vinsten, utan att använda för mycket råvaror.

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

Dualvariabel: y_i pris på råvara i .

LP-dual: Minimera kostnaden för råvarorna. Balansera kostnad mot intäkt.

$$\begin{array}{llllll} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & (x_1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

Komplementaritetsvillkoren:

Priset är noll om råvaran inte används fullt ut.

Produkten görs ej om kostnaden blir högre än intäkten.

LP-dualitet: Generellt

Primal:

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{då} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

LP-dualitet: Generellt

Primal:

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{då} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$\max z = c^T x$$

$$\text{då} \quad Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

LP-dualitet: Generellt

Primal:

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{då} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$
$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\max z = c^T x$$
$$\text{då} \quad Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Dual:

$$\min v = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{då} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, \dots, n$$
$$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

LP-dualitet: Generellt

Primal:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{då} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{då} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j \quad j = 1, \dots, n \\ y_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad z &= c^T x \\ \text{då} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad v &= b^T y \\ \text{då} \quad A^T y &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om x är tillåten i primalen och y är tillåten i dualen så $c^T x \leq b^T y$.

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om x är tillåten i primalen och y är tillåten i dualen så $c^T x \leq b^T y$.

(bevis)

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om x är tillåten i primalen och y är tillåten i dualen så $c^T x \leq b^T y$.

(bevis) (rita)

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om x är tillåten i primalen och y är tillåten i dualen så $c^T x \leq b^T y$.

(bevis) (rita)

Följdsats

Om \bar{x} är tillåten i primalen, \bar{y} är tillåten i dualen och $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ så är \bar{x} optimal i primalen och \bar{y} optimal i dualen.

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om x är tillåten i primalen och y är tillåten i dualen så $c^T x \leq b^T y$.

(bevis) (rita)

Följdsats

Om \bar{x} är tillåten i primalen, \bar{y} är tillåten i dualen och $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ så är \bar{x} optimal i primalen och \bar{y} optimal i dualen.

(se figur)

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om x är tillåten i primalen och y är tillåten i dualen så $c^T x \leq b^T y$.

(bevis) (rita)

Följdsats

Om \bar{x} är tillåten i primalen, \bar{y} är tillåten i dualen och $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ så är \bar{x} optimal i primalen och \bar{y} optimal i dualen.

(se figur)

Följdsats

Om primalen (dualen) är obegränsad, så saknar dualen (primalen) tillåten lösning.

LP-dualitet: Relationer

Exakt vilka relationer har primal och dual?

Svaga dualsatsen

Om x är tillåten i primalen och y är tillåten i dualen så $c^T x \leq b^T y$.

(bevis) (rita)

Följdsats

Om \bar{x} är tillåten i primalen, \bar{y} är tillåten i dualen och $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ så är \bar{x} optimal i primalen och \bar{y} optimal i dualen.

(se figur)

Följdsats

Om primalen (dualen) är obegränsad, så saknar dualen (primalen) tillåten lösning.

Båda kan dock sakna lösning.

LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel, y_i , anger hur mycket primala bivillkor i "tar emot".

LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel, y_i , anger hur mycket primala bivillkor i "tar emot".
Ett bivillkor som inte är aktivt tar inte emot alls.

LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel, y_i , anger hur mycket primala bivillkor i "tar emot".

Ett bivillkor som inte är aktivt tar inte emot alls.

Komplementaritet (i ord):

Om primala bivillkor i inte är aktivt, måste $y_i = 0$.

Om duala bivillkor j inte är aktivt, måste $x_j = 0$.

LP-dualitet: Komplementaritet

En dualvariabel, y_i , anger hur mycket primala bivillkor i "tar emot".

Ett bivillkor som inte är aktivt tar inte emot alls.

Komplementaritet (i ord):

Om primala bivillkor i inte är aktivt, måste $y_i = 0$.

Om duala bivillkor j inte är aktivt, måste $x_j = 0$.

Komplementaritetsvillkoren

Primallösningen x och duallösningen y uppfyller komplementaritetsvillkoren om

$$y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j \right) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

Sats

Om x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är $c^T x = b^T y$.

LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

Sats

Om x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är $c^T x = b^T y$.

(peka på bevis)

LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

Sats

Om x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är $c^T x = b^T y$.

(peka på bevis)

Följdsats

Om x är tillåten i primalen, y är tillåten i dualen och x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är x optimal i primalen och y optimal i dualen.

LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

Sats

Om x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är $c^T x = b^T y$.

(peka på bevis)

Följdsats

Om x är tillåten i primalen, y är tillåten i dualen och x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är x optimal i primalen och y optimal i dualen.

Åt andra hållet:

LP-dualitet: Komplementaritet

Komplementaritetsvillkoren kan skrivas som

$$y^T(Ax - b) = 0$$

$$x^T(A^T y - c) = 0$$

Sats

Om x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är $c^T x = b^T y$.

(peka på bevis)

Följdsats

Om x är tillåten i primalen, y är tillåten i dualen och x och y uppfyller komplementaritetsvillkoren, så är x optimal i primalen och y optimal i dualen.

Åt andra hållet:

Starka dualsatsen

Om x och y är optimallösningar så gäller $c^T x = b^T y$.

LP-dualitet: Slutsatser

Fullständiga dualsatsen

- Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning, x^* , så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning, y^* , och $c^T x^* = b^T y^*$.
- Om primalen är obegränsad, så saknar dualen tillåten lösning.
- Om primalen saknar tillåten lösning, så saknar dualen lösning eller har obegränsad lösning.

LP-dualitet: Slutsatser

Fullständiga dualsatsen

- Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning, x^* , så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning, y^* , och $c^T x^* = b^T y^*$.
- Om primalen är obegränsad, så saknar dualen tillåten lösning.
- Om primalen saknar tillåten lösning, så saknar dualen lösning eller har obegränsad lösning.

(Symmetriskt i primal - dual.)

LP-dualitet: Slutsatser

Fullständiga dualsatsen

- Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning, x^* , så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning, y^* , och $c^T x^* = b^T y^*$.
- Om primalen är obegränsad, så saknar dualen tillåten lösning.
- Om primalen saknar tillåten lösning, så saknar dualen lösning eller har obegränsad lösning.

(Symmetriskt i primal - dual.)

Optimalitetsvillkor (KKT)

Primal tillåtenhet +
Dual tillåtenhet +
Komplementaritet
= Optimalitet

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = \quad c^T x \\ \text{då} \quad \quad Ax \leq b \\ \quad \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = \quad b^T y \\ \text{då} \quad \quad \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Primal	Dual
max	min

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b$	$y \geq 0$

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b \Rightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b \Rightarrow$	$y \leq 0$

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b \Rightarrow$	$y \geq 0$
$Ax \geq b \Rightarrow$	$y \leq 0$
$Ax = b \Rightarrow$	$y \text{ fri}$

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$y \leq 0$
$Ax = b$	y fri
$x \geq 0$	$A^T y \geq c$

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$y \leq 0$
$Ax = b$	y fri
$x \geq 0$	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	$A^T y \leq c$

LP-dualitet: Formulering

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Primal	Dual
max	min
$Ax \leq b$	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	$y \leq 0$
$Ax = b$	y fri
$x \geq 0$	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	$A^T y \leq c$
x fri	$A^T y = c$

LP-dualitet: Formulering, symmetriskt

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dual:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Primal:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

Dual		Primal
max		min
$Ax \leq b$	\Leftrightarrow	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	\Leftrightarrow	$y \leq 0$
$Ax = b$	\Leftrightarrow	y fri
$x \geq 0$	\Leftrightarrow	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	\Leftrightarrow	$A^T y \leq c$
x fri	\Leftrightarrow	$A^T y = c$

LP-dualitet: Formulering, symmetriskt

Standard:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primal/dual:} \\ \max \quad z = c^T x \\ \text{då} \quad Ax \leq b \\ \quad \quad x \geq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dual/primal:} \\ \min \quad v = b^T y \\ \text{då} \quad A^T y \geq c \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Variationer:

*		*
max		min
$Ax \leq b$	\Leftrightarrow	$y \geq 0$
$Ax \geq b$	\Leftrightarrow	$y \leq 0$
$Ax = b$	\Leftrightarrow	y fri
$x \geq 0$	\Leftrightarrow	$A^T y \geq c$
$x \leq 0$	\Leftrightarrow	$A^T y \leq c$
x fri	\Leftrightarrow	$A^T y = c$

LP-dualitet: Formulering: Exempel

Primal:

$$\begin{array}{rclllll} \max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & & & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 10 & (1) & (y_1) \\ & & 7x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 16 & (2) & (y_2) \\ & & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 43 & (3) & (y_3) \\ & & x_1 & \geq & 0, & x_2 & \text{fri,} & x_3 & \leq & 0 & \end{array}$$

Dualitet och baslösningar

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & A^T y \geq c \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl.:

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

Dualitet och baslösningar

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & A^T y \geq c \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl.:

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

Baslösning:

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{då} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & B^T y \geq c_B \\ & N^T y \geq c_N \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl

$$\begin{array}{l} x_B^T (B^T y - c_B) = 0 \\ x_N^T (N^T y - c_N) = 0 \end{array}$$

Dualitet och baslösningar

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & A^T y \geq c \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl.:

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

Baslösning:

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{då} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & B^T y \geq c_B \\ & N^T y \geq c_N \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl

$$\begin{array}{l} x_B^T (B^T y - c_B) = 0 \\ x_N^T (N^T y - c_N) = 0 \end{array}$$

$$x_B > 0 \Rightarrow$$

Dualitet och baslösningar

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & A^T y \geq c \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl.:

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

Baslösning:

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{då} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & B^T y \geq c_B \\ & N^T y \geq c_N \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl

$$\begin{array}{l} x_B^T (B^T y - c_B) = 0 \\ x_N^T (N^T y - c_N) = 0 \end{array}$$

$$x_B > 0 \Rightarrow B^T y = c_B \Rightarrow$$

Dualitet och baslösningar

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & A^T y \geq c \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl.:

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

Baslösning:

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{då} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & B^T y \geq c_B \\ & N^T y \geq c_N \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl

$$\begin{array}{l} x_B^T (B^T y - c_B) = 0 \\ x_N^T (N^T y - c_N) = 0 \end{array}$$

$$x_B > 0 \Rightarrow B^T y = c_B \Rightarrow y = B^{-1T} c_B = (c_B^T B^{-1})^T.$$

Dualitet och baslösningar

Primal:	Dual:	Kompl.:
$\max z = c^T x$	$\min v = b^T y$	
då $Ax = b$	då $A^T y \geq c$	$x^T (A^T y - c) = 0$
$x \geq 0$	y fri	

Baslösning:

Primal:	Dual:	Kompl
$\max z = c_B^T x_B + c_N^T x_N$	$\min v = b^T y$	
då $Bx_B + Nx_N = b$	då $B^T y \geq c_B$	$x_B^T (B^T y - c_B) = 0$
$x_B, x_N \geq 0$	$N^T y \geq c_N$	$x_N^T (N^T y - c_N) = 0$
	y fri	

$$x_B > 0 \Rightarrow B^T y = c_B \Rightarrow y = B^{-1T} c_B = (c_B^T B^{-1})^T.$$

Dual tillåtenhet: Sätt in y i $N^T y \geq c_N$.

Dualitet och baslösningar

Primal:	Dual:	Kompl.:
$\max z = c^T x$	$\min v = b^T y$	
då $Ax = b$	då $A^T y \geq c$	$x^T (A^T y - c) = 0$
$x \geq 0$	y fri	

Baslösning:

Primal:	Dual:	Kompl
$\max z = c_B^T x_B + c_N^T x_N$	$\min v = b^T y$	
då $Bx_B + Nx_N = b$	då $B^T y \geq c_B$	$x_B^T (B^T y - c_B) = 0$
$x_B, x_N \geq 0$	$N^T y \geq c_N$	$x_N^T (N^T y - c_N) = 0$
	y fri	

$$x_B > 0 \Rightarrow B^T y = c_B \Rightarrow y = B^{-1T} c_B = (c_B^T B^{-1})^T.$$

Dual tillåtenhet: Sätt in y i $N^T y \geq c_N$. Uppfyllt om $\hat{c}_N \leq 0$ där $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1} N)^T$.

Dualitet och baslösningar

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^T x \\ \text{då} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & A^T y \geq c \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl.:

$$x^T (A^T y - c) = 0$$

Baslösning:

Primal:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{då} & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = b^T y \\ \text{då} & B^T y \geq c_B \\ & N^T y \geq c_N \\ & y \text{ fri} \end{array}$$

Kompl

$$\begin{array}{l} x_B^T (B^T y - c_B) = 0 \\ x_N^T (N^T y - c_N) = 0 \end{array}$$

$$x_B > 0 \Rightarrow B^T y = c_B \Rightarrow y = B^{-1T} c_B = (c_B^T B^{-1})^T.$$

Dual tillåtenhet: Sätt in y i $N^T y \geq c_N$. Uppfyllt om $\hat{c}_N \leq 0$ där $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1} N)^T$.

Primal och dual lösning: $x_B = B^{-1} b$, $x_N = 0$, $y = B^{-1T} c_B$.

Dualitet och baslösningar, forts

Slutsats

Dual tillåtenhet \Leftrightarrow primal optimalitet.

Dualitet och baslösningar, forts

Slutsats

Dual tillåtenhet \Leftrightarrow primal optimalitet.

Vi har bevisat starka dualsatsen.

Dualitet och baslösningar, forts

Slutsats

Dual tillåtenhet \Leftrightarrow primal optimalitet.

Vi har bevisat starka dualsatsen.

Starka dualsatsen, version 2

Om primalen har en tillåten, begränsad optimallösning, $x^* = B^{-1}b$, så har även dualen en tillåten, begränsad optimallösning, som ges av $y^* = B^{-1T}c_B$.

Både primalen och dualen har det optimala målfunktionsvärdet $z^* = c_B^T B^{-1}b$.

LP-dualitet: Exempel

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \quad (1) \quad (y_1)$$

$$x_1 \leq 6 \quad (2) \quad (y_2)$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 50 \quad (3) \quad (y_3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llllllll} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & (x_1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llllllll} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & (x_1) \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

Komplementaritetsvillkoren:

$$\begin{array}{ll} y_1 & (2x_1 + 3x_2 - 30) = 0 \\ y_2 & (x_1 - 6) = 0 \\ y_3 & (6x_1 + 4x_2 - 50) = 0 \\ x_1 & (2y_1 + y_2 + 6y_3 - 4) = 0 \\ x_2 & (3y_1 + 4y_3 - 3) = 0 \end{array}$$

LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 36$.

LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 36$.

Basvariabler x_1 , x_2 , x_4 .

LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 36$.

Basvariabler x_1 , x_2 , x_4 .

Villkor 1 aktivt.

Villkor 2 ej aktivt $\Rightarrow y_2 = 0$.

Villkor 3 aktivt.

LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 36$.

Basvariabler x_1 , x_2 , x_4 .

Villkor 1 aktivt.

Villkor 2 ej aktivt $\Rightarrow y_2 = 0$.

Villkor 3 aktivt.

$$x_1 > 0 \Rightarrow 2y_1 + y_2 + 6y_3 = 4.$$

$$x_2 > 0 \Rightarrow 3y_1 + 4y_3 = 3.$$

LP-dualitet: Exempel

Primal optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 36$.

Basvariabler x_1 , x_2 , x_4 .

Villkor 1 aktivt.

Villkor 2 ej aktivt $\Rightarrow y_2 = 0$.

Villkor 3 aktivt.

$$x_1 > 0 \Rightarrow 2y_1 + y_2 + 6y_3 = 4.$$

$$x_2 > 0 \Rightarrow 3y_1 + 4y_3 = 3.$$

Dual optimallösning: $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

LP-dualitet och simplextablån

Duallösningen återfinnes under slackvariablerna i optimaltablån.

LP-dualitet och simplextablån

Duallösningen återfinnes under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

LP-dualitet och simplextablån

Duallösningen återfinnes under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Dual optimallösning: $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{l} \min \quad v = 10y \\ \text{då} \quad 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ \quad \quad 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ \quad \quad 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ \quad \quad 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{l} \min \quad v = 10y \\ \text{då} \quad 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ \quad \quad 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ \quad \quad 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ \quad \quad 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2, v = 25$.

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2, v = 25$.

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt.

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{l} \min \quad v = 10y \\ \text{då} \quad 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ \quad \quad 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ \quad \quad 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ \quad \quad 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2, v = 25$.

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$.

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{l} \min \quad v = 10y \\ \text{då} \quad 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ \quad \quad 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ \quad \quad 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ \quad \quad 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2, v = 25$.

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$.

$y > 0$

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{l} \min \quad v = 10y \\ \text{då} \quad 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ \quad \quad 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ \quad \quad 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ \quad \quad 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2, v = 25$.

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$.

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$.

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{l} \min \quad v = 10y \\ \text{då} \quad 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ \quad \quad 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ \quad \quad 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ \quad \quad 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2, v = 25$.

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$.

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$. Problemet löst.

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{l} \max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} \quad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ \quad \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{l} \min \quad v = 10y \\ \text{då} \quad 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ \quad \quad 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ \quad \quad 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ \quad \quad 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2, v = 25$.

Komplementaritet villkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$.

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$. Problemet löst.

Det blev en metod!

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2, v = 25$.

Komplementaritetsvillkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$.

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$. Problemet löst.

Det blev en metod! $\max_j (c_j/a_j)$

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2, v = 25$.

Komplementaritet villkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$.

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$. Problemet löst.

Det blev en metod! $\max_j (c_j/a_j)$ ger bästa x_j .

LP-dualitet: Kappsäcksproblem: Exempel

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ \text{då} & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 10 \quad (y) \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{ll} \min & v = 10y \\ \text{då} & 2y \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ & 2y \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ & 2y \geq 5 \quad (3) \quad (x_3) \\ & 4y \geq 7 \quad (4) \quad (x_4) \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Skriv som: $\min v = 10y$ då $y \geq 1, y \geq 3/2, y \geq 5/2, y \geq 7/4, y \geq 0$

Optimallösning: $y = 5/2, v = 25$.

Komplementaritet villkoren:

Endast duala bivillkor 3 aktivt. $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$.

$y > 0 \Rightarrow 2x_3 = 10 \Rightarrow x_3 = 5$. Problemet löst.

Det blev en metod! $\max_j (c_j/a_j)$ ger bästa x_j . Ta med den.

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & & \\ \text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & & \\ & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & & \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & & \\ \text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\ & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 & & \end{array}$$

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & \\ \text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\ & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{rcllcl} \min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & & \\ \text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) & \\ & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) & \\ & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) & \\ & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & & & \end{array}$$

LP-dualitet: Exempel

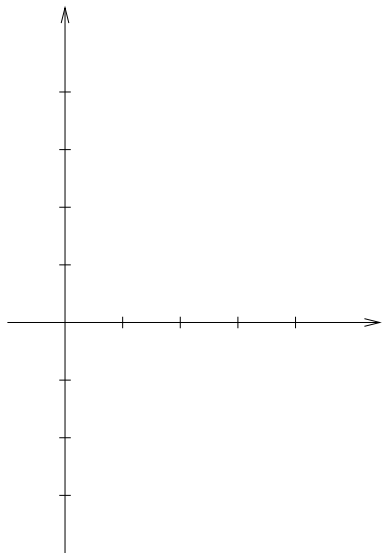
$$\begin{array}{rcllcl} \max & z = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & & \\ \text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & (y_1) \\ & & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & (y_2) \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

LP-dual:

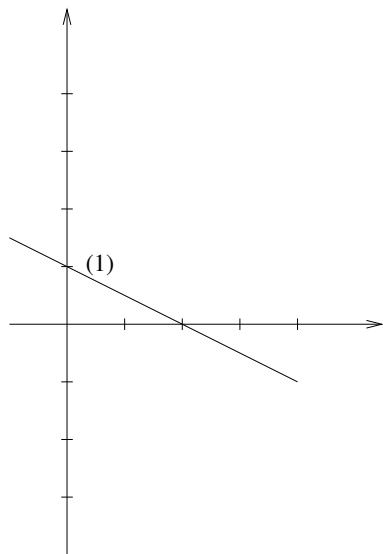
$$\begin{array}{rcllcl} \min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & & & & & \\ \text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 2 & (1) & (x_1) \\ & & y_1 & - & y_2 & \geq & 3 & (2) & (x_2) \\ & & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 4 & (3) & (x_3) \\ & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 & & & \end{array}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

LP-dualitet: Exempel

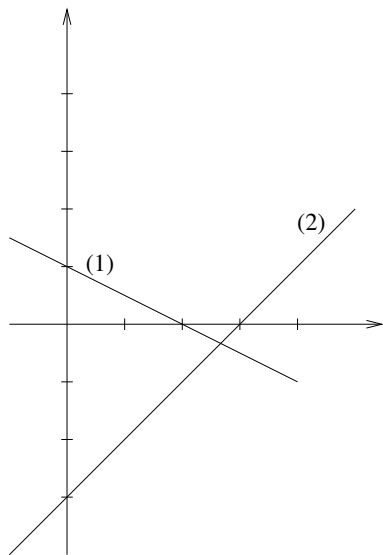


LP-dualitet: Exempel



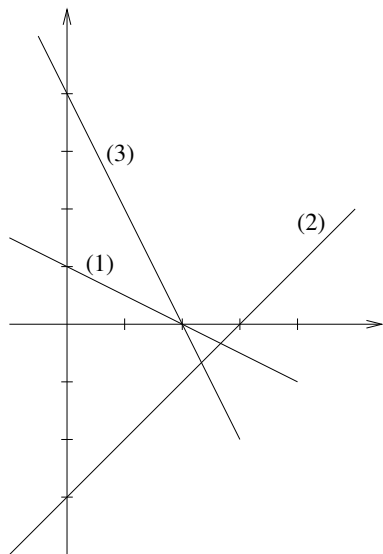
Duala bivillkor 1: $y_1 + 2y_2 \geq 2$.

LP-dualitet: Exempel



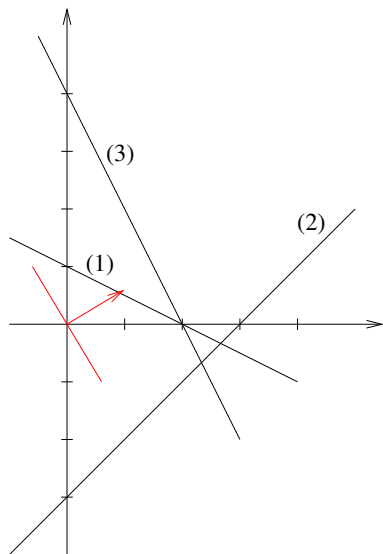
Duala bivillkor 2: $y_1 - y_2 \geq 3$.

LP-dualitet: Exempel



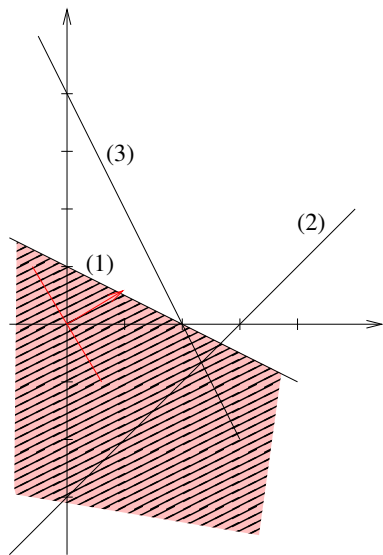
Duala bivillkor 3: $2y_1 + y_2 \geq 4$.

LP-dualitet: Exempel



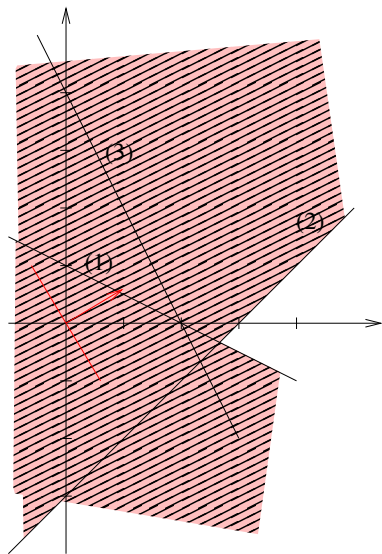
Dual målfunktion: $v = 5y_1 + 3y_2$.

LP-dualitet: Exempel



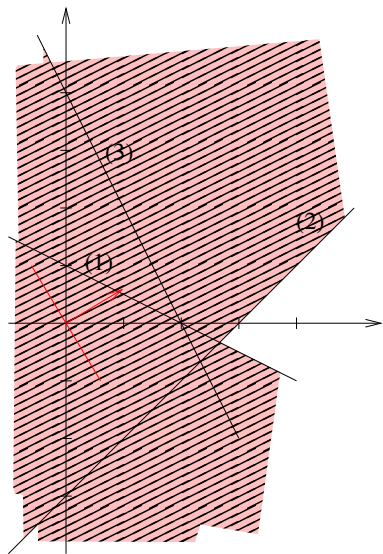
Duala bivillkor 1: $y_1 + 2y_2 \geq 2$.

LP-dualitet: Exempel



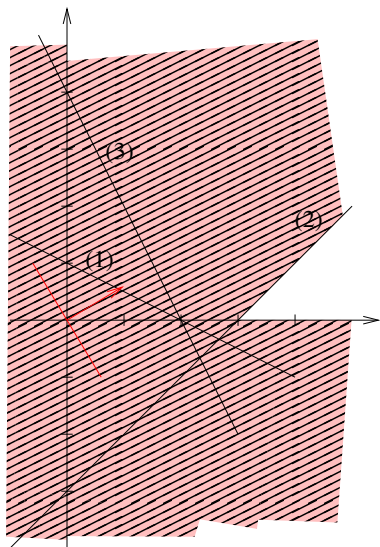
Duala bivillkor 2: $y_1 - y_2 \geq 3$.

LP-dualitet: Exempel



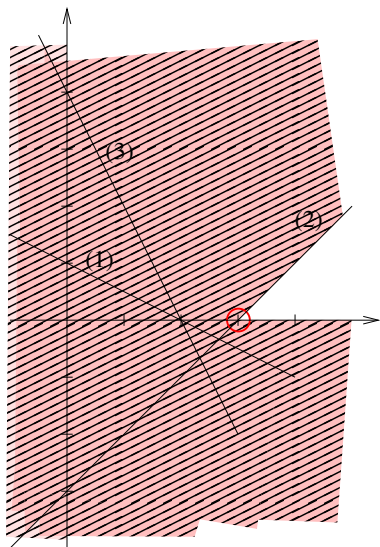
Duala bivillkor 3: $2y_1 + y_2 \geq 4$.

LP-dualitet: Exempel



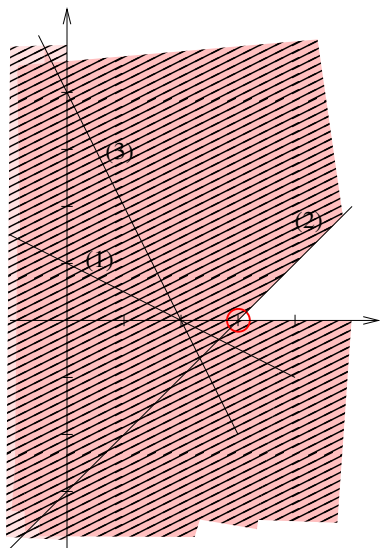
Duala ickenegativitetsvillkor: $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$.

LP-dualitet: Exempel



Dual optimalpunkt: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$.

LP-dualitet: Exempel



Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad &x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \quad (y_1) \\ &2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \quad (y_2) \\ &x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad &y_1 + 2y_2 \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ &y_1 - y_2 \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ &2y_1 + y_2 \geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ &y_1, \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritetsvillkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva.

LP-dualitet: Exempel

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \quad (y_1)$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \quad (y_2)$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0$$

LP-dual:

$$\min v = 5y_1 + 3y_2$$

$$\text{då} \quad y_1 + 2y_2 \geq 2 \quad (1) \quad (x_1)$$

$$y_1 - y_2 \geq 3 \quad (2) \quad (x_2)$$

$$2y_1 + y_2 \geq 4 \quad (3) \quad (x_3)$$

$$y_1, \quad y_2 \geq 0$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritet villkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritet villkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$y_1 > 0$

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad &x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \quad (y_1) \\ &2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \quad (y_2) \\ &x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad &y_1 + 2y_2 \geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ &y_1 - y_2 \geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ &2y_1 + y_2 \geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ &y_1, \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritet villkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$.

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritet villkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$. Problemet löst.

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritetsvillkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$. Problemet löst. (Kolla gärna primala bivillkor 2.)

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritetsvillkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$. Problemet löst. (Kolla gärna primala bivillkor 2.)

Lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $z = 15$.

LP-dualitet: Exempel

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{då} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \quad (y_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \quad (y_2) \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dual:

$$\begin{aligned} \min \quad v &= 5y_1 + 3y_2 \\ \text{då} \quad y_1 + 2y_2 &\geq 2 \quad (1) \quad (x_1) \\ y_1 - y_2 &\geq 3 \quad (2) \quad (x_2) \\ 2y_1 + y_2 &\geq 4 \quad (3) \quad (x_3) \\ y_1, \quad y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP-dualen 2-dimensionell. Lös grafiskt.

Optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$, $v = 15$.

Komplementaritet villkoren:

Duala bivillkor 1 och 3 inte aktiva. $\Rightarrow x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$y_1 > 0 \Rightarrow x_2 = 5$. Problemet löst. (Kolla gärna primala bivillkor 2.)

Lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $z = 15$. (Kolla gärna z .)

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i .

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i .

Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i .

Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion: $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$.

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i .

Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion: $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$.

Stoppa in dual optimallösning: $y_1 = 3, y_2 = 0$

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i .

Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion: $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$.

Stoppa in dual optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$ ger $v = 3b_1$.

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i .

Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion: $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$.

Stoppa in dual optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$ ger $v = 3b_1$.

En enhets ökning av b_1 ger 3 enheters ökning av v , dvs. z .

Skuggpriser

Hur mycket förändras det optimala målfunktionsvärdet av en liten ändring av ett högerled?

Detta mått kallas **skuggpris** (eller marginalpris).

Starka dualsatsen: $z = c^T x = b^T y$ eller $z = \sum_j c_j x_j = \sum_i b_i y_i$

Derivatan av z med avseende på b_i är y_i .

Slutsats

Skuggpriserna ges av den optimala duallösningen.

I exemplet: Dual målfunktion: $v = b_1 y_1 + b_2 y_2$.

Stoppa in dual optimallösning: $y_1 = 3$, $y_2 = 0$ ger $v = 3b_1$.

En enhets ökning av b_1 ger 3 enheters ökning av v , dvs. z .

En enhets ökning av b_2 ger ingen ändring av v , dvs. z .

Skuggpriser

I en viss baslösning har vi $x_B = B^{-1}b$ och $y = B^{-1T}c_B$.

Skuggpriser

I en viss baslösning har vi $x_B = B^{-1}b$ och $y = B^{-1T}c_B$.

Skuggpriserna är oförändrade så länge som B^{-1} och c_B är oförändrade,

Skuggpriser

I en viss baslösning har vi $x_B = B^{-1}b$ och $y = B^{-1T}c_B$.

Skuggpriserna är oförändrade så länge som B^{-1} och c_B är oförändrade, dvs. så länge som samma baslösning är optimal.

Skuggpriser

I en viss baslösning har vi $x_B = B^{-1}b$ och $y = B^{-1T}c_B$.

Skuggpriserna är oförändrade så länge som B^{-1} och c_B är oförändrade, dvs. så länge som samma baslösning är optimal.

Om ändringen i b ger $B^{-1}b \not\geq 0$, ändras optimal baslösning/skuggpriser.

Skuggpriser

I en viss baslösning har vi $x_B = B^{-1}b$ och $y = B^{-1T}c_B$.

Skuggpriserna är oförändrade så länge som B^{-1} och c_B är oförändrade, dvs. så länge som samma baslösning är optimal.

Om ändringen i b ger $B^{-1}b \not\geq 0$, ändras optimal baslösning/skuggpriser.

$B^{-1}b \geq 0$ ger gränser på b för oförändrad optimallösning.

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

Om optimal baslösning inte ändras blir alla förändringar lätta att räkna ut,

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

Om optimal baslösning inte ändras blir alla förändringar lätta att räkna ut, för då ändras inte B^{-1} .

Känslighetsanalys

Har optimallösning.

Indata ändras.

Vad händer?

Är optimallösningen helt oförändrad?

Är optimala baslösningen oförändrad?

För hur stora ändringar ändras inte (bas)lösningen?

Om optimal baslösning inte ändras blir alla förändringar lätta att räkna ut, för då ändras inte B^{-1} .

Stoppa in nya b och/eller c i $x_B = B^{-1}b$, $y = B^{-1T}c_B$ och $z = c_B^T x_B$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b .

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c .

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel, c_N :

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.
För ickebasvariabel, c_N : $c_N \leq N^T y^*$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel, c_N : $c_N \leq N^T y^*$.

(Ändringen i \hat{c} blir lika stor som ändringen i c .)

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel, c_N : $c_N \leq N^T y^*$.

(Ändringen i \hat{c} blir lika stor som ändringen i c .)

För basvariabel, c_B :

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel, c_N : $c_N \leq N^T y^*$.

(Ändringen i \hat{c} blir lika stor som ändringen i c .)

För basvariabel, c_B : Beräkna $y = B^{-1T} c_B$ och kolla $N^T y \geq c_N$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel, c_N : $c_N \leq N^T y^*$.

(Ändringen i \hat{c} blir lika stor som ändringen i c .)

För basvariabel, c_B : Beräkna $y = B^{-1T} c_B$ och kolla $N^T y \geq c_N$.

- Addition av nytt bivillkor, $a_i^T x \leq b_i$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel, c_N : $c_N \leq N^T y^*$.

(Ändringen i \hat{c} blir lika stor som ändringen i c .)

För basvariabel, c_B : Beräkna $y = B^{-1T} c_B$ och kolla $N^T y \geq c_N$.

- Addition av nytt bivillkor, $a_i^T x \leq b_i$. Kolla tillåtenhet, $a_i^T x^* \leq b_i$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel, c_N : $c_N \leq N^T y^*$.

(Ändringen i \hat{c} blir lika stor som ändringen i c .)

För basvariabel, c_B : Beräkna $y = B^{-1T} c_B$ och kolla $N^T y \geq c_N$.

- Addition av nytt bivillkor, $a_i^T x \leq b_i$. Kolla tillåtenhet, $a_i^T x^* \leq b_i$.
- Addition av ny variabel, x_k , med kolumn a_k och målfunktionskoefficient c_k

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel, c_N : $c_N \leq N^T y^*$.

(Ändringen i \hat{c} blir lika stor som ändringen i c .)

För basvariabel, c_B : Beräkna $y = B^{-1T} c_B$ och kolla $N^T y \geq c_N$.

- Addition av nytt bivillkor, $a_i^T x \leq b_i$. Kolla tillåtenhet, $a_i^T x^* \leq b_i$.
- Addition av ny variabel, x_k , med kolumn a_k och målfunktionskoefficient c_k (dvs. dualt bivillkor, $a_k^T y \geq c_k$).

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel, c_N : $c_N \leq N^T y^*$.

(Ändringen i \hat{c} blir lika stor som ändringen i c .)

För basvariabel, c_B : Beräkna $y = B^{-1T} c_B$ och kolla $N^T y \geq c_N$.

- Addition av nytt bivillkor, $a_i^T x \leq b_i$. Kolla tillåtenhet, $a_i^T x^* \leq b_i$.
- Addition av ny variabel, x_k , med kolumn a_k och målfunktionskoefficient c_k (dvs. dualt bivillkor, $a_k^T y \geq c_k$).

Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel, c_N : $c_N \leq N^T y^*$.

(Ändringen i \hat{c} blir lika stor som ändringen i c .)

För basvariabel, c_B : Beräkna $y = B^{-1T} c_B$ och kolla $N^T y \geq c_N$.

- Addition av nytt bivillkor, $a_i^T x \leq b_i$. Kolla tillåtenhet, $a_i^T x^* \leq b_i$.
- Addition av ny variabel, x_k , med kolumn a_k och målfunktionskoefficient c_k (dvs. dualt bivillkor, $a_k^T y \geq c_k$).

Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

Primal optimalitet: $\hat{c}_k = c_k - a_k^T y^* \leq 0$.

Känslighetsanalys

Vi beaktar ändringar av:

- Högerled, b . Kolla tillåtenhet, $x_B = B^{-1}b \geq 0$.
- Målfunktionskoefficient, c . Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

För ickebasvariabel, c_N : $c_N \leq N^T y^*$.

(Ändringen i \hat{c} blir lika stor som ändringen i c .)

För basvariabel, c_B : Beräkna $y = B^{-1T} c_B$ och kolla $N^T y \geq c_N$.

- Addition av nytt bivillkor, $a_i^T x \leq b_i$. Kolla tillåtenhet, $a_i^T x^* \leq b_i$.
- Addition av ny variabel, x_k , med kolumn a_k och målfunktionskoefficient c_k (dvs. dualt bivillkor, $a_k^T y \geq c_k$).

Kolla optimalitet = dual tillåtenhet.

Primal optimalitet: $\hat{c}_k = c_k - a_k^T y^* \leq 0$.

Alternativ: Kolla **dual tillåtenhet:** $a_k^T y^* \geq c_k$.

Vårt musexempel

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{då} \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \quad (1) \quad (y_1) \quad (\text{knappar})$$

$$x_1 \leq 6 \quad (2) \quad (y_2) \quad (\text{optik})$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 50 \quad (3) \quad (y_3) \quad (\text{monteringstid})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Vårt musexempel

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (y_1) & \text{(knappar)} \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (y_2) & \text{(optik)} \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (y_3) & \text{(monteringstid)} \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & & & \end{array}$$

LP-dual:

$$\begin{array}{llllll} \min & v = & 30y_1 & + & 6y_2 & + & 50y_3 & & \\ \text{då} & & 2y_1 & + & y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 & (1) & (x_1) & \text{(Optimus)} \\ & & 3y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 3 & (2) & (x_2) & \text{(Rullmus)} \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & & & \end{array}$$

Optimaltablå:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
x_4	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
x_1	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
x_2	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

Optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 36$.

Skuggpriser: $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
x_4	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
x_1	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
x_2	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

Optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 36$.

Skuggpriser: $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 36$.

Skuggpriser: $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Det är en ökning av b_1 , så vi tjänar $y_1 = 1/5$ per enhets ökning.

Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 36$.

Skuggpriser: $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Det är en ökning av b_1 , så vi tjänar $y_1 = 1/5$ per enhets ökning.

För hur stor ökning gäller detta?

Känslighetsanalys i simplextablån

Optimaltablå för vårt exempel:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$, $z = 36$.

Skuggpriser: $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Vad skulle vi tjäna på en ökning av tillgången av knappar?

Det är en ökning av b_1 , så vi tjänar $y_1 = 1/5$ per enhets ökning.

För hur stor ökning gäller detta? Kolla $B^{-1}b \geq 0$.

Känslighetsanalys i simplextablån

Kan läsa av B^{-1} under slackvariablerna i optimaltablån.

Känslighetsanalys i simplextablån

Kan läsa av B^{-1} under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
x_4	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
x_1	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
x_2	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

Känslighetsanalys i simplextablån

Kan läsa av B^{-1} under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	$1/5$	0	$3/5$	36
x_4	0	0	0	$2/5$	1	$-3/10$	3
x_1	0	1	0	$-2/5$	0	$3/10$	3
x_2	0	0	1	$3/5$	0	$-1/5$	8

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & -3/10 \\ -2/5 & 0 & 3/10 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1/5 - 9 \\ -2b_1/5 + 15 \\ 3b_1/5 - 10 \end{pmatrix} \geq 0$$

Känslighetsanalys i simplextablån

Kan läsa av B^{-1} under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & -3/10 \\ -2/5 & 0 & 3/10 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1/5 - 9 \\ -2b_1/5 + 15 \\ 3b_1/5 - 10 \end{pmatrix} \geq 0$$

vilket ger $22.5 \leq b_1 \leq 37.5$.

Känslighetsanalys i simplextablån

Kan läsa av B^{-1} under slackvariablerna i optimaltablån.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\hat{b}
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2/5 & 1 & -3/10 \\ -2/5 & 0 & 3/10 \\ 3/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1/5 - 9 \\ -2b_1/5 + 15 \\ 3b_1/5 - 10 \end{pmatrix} \geq 0$$

vilket ger $22.5 \leq b_1 \leq 37.5$.

Så vi tjänar 1/5 kr per ytterligare knapp, för b_1 upp till 37.5.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6 : kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6 : kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6 : kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6 : kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt x_6 förbli noll.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6 : kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6 : kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6 : kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm c_6 så att $\hat{c}_6 > 0$:

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6 : kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm c_6 så att $\hat{c}_6 > 0$:

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (1/5 + 3) = c_6 - 3.2 > 0$$

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6 : kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm c_6 så att $\hat{c}_6 > 0$:

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (1/5 + 3) = c_6 - 3.2 > 0 \text{ om } c_6 > 3.2.$$

Exempel: Ny variabel

Ska Mickey AB göra en ny sorts mus, SuperGamer, som består av en knapp och två optiska enheter, kräver 5 min för montering och ger intäkten 3 kr/enhet?

Ny variabel, x_6 : kolumn: $a_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ målfunktionskoefficient: $c_6 = 3$.

Dual optimallösning (skuggpriser) : $y_1 = 1/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3/5$.

Reducerad kostnad (dual tillåtenhet):

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 3 - (1/5 + 3) = -1/5 \leq 0.$$

Slutsats: Låt x_6 förbli noll. Gör inga SuperGamer.

Mickey vill justera priset så att SuperGamer blir lönsam.

Bestäm c_6 så att $\hat{c}_6 > 0$:

$$\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (1/5 + 3) = c_6 - 3.2 > 0 \text{ om } c_6 > 3.2.$$

För att få lite marginal sätter man priset så att intäkten blir 3:50 kr.

Känslighetsanalys från koder

Indatafil: (GMPL)

```
var x1 >= 0;  
var x2 >= 0;  
  
maximize obj:    4*x1 + 3*x2;  
subject to con1: 2*x1 + 3*x2 <= 30;  
subject to con2:  x1           <= 6;  
subject to con3: 6*x1 + 4*x2 <= 50;  
end;
```

Lösning av problemet: Skriv

```
glpsol -m lp-ko1.mod -o lp-ko1.sol
```

Känslighetsanalys från koder

På skärmen (rensat):

```
Reading model section from lp-ko1.mod...
```

```
11 lines were read
```

```
Model has been successfully generated
```

```
GLPK Simplex Optimizer, v4.44
```

```
4 rows, 2 columns, 7 non-zeros
```

```
Preprocessing...
```

```
2 rows, 2 columns, 4 non-zeros
```

```
Scaling...
```

```
A: min|aij| = 2.000e+00 max|aij| = 6.000e+00 ratio = 3.000e+00
```

```
Problem data seem to be well scaled
```

```
Constructing initial basis...
```

```
Size of triangular part = 2
```

```
* 0: obj = 0.000000000e+00 infeas = 0.000e+00 (0)
```

```
* 3: obj = 3.600000000e+01 infeas = 0.000e+00 (0)
```

```
OPTIMAL SOLUTION FOUND
```

```
Time used: 0.0 secs
```

```
Memory used: 0.1 Mb (108000 bytes)
```

```
Writing basic solution to 'lp-ko1.sol'...
```

Känslighetsanalys från koder

I utdatafilen lp-ko1.sol (rensat):

Problem: lp
Rows: 4
Columns: 2
Non-zeros: 7
Status: OPTIMAL
Objective: obj = 36 (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	obj	B	36			
2	con1	NU	30		30	0.2
3	con2	B	3		6	
4	con3	NU	50		50	0.6

No.	Column name	St	Activity	Lower bound	Upper bound	Marginal
1	x1	B	3	0		
2	x2	B	8	0		

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:

Känslighetsanalys från koder

Lösning av problemet med känslighetsanalys: Skriv

```
glpsol -m lp-ko1.mod --bounds lp-ko1.bnd
```

I utdatafilen lp-ko1.bnd (rensat):

GLPK 4.44 - SENSITIVITY ANALYSIS REPORT

Problem: lpluma

Objective: obj = 36 (MAXimum)

No.	Row name	St	Activity	Slack Marginal	Lower bound Upper bound	Activity range
1	obj	BS	36.00000	-36.00000 .	-Inf +Inf	30.00000 36.00000
2	con1	NU	30.00000	. .20000	-Inf 30.00000	22.50000 37.50000
3	con2	BS	3.00000	3.00000 .	-Inf 6.00000	. 8.33333
4	con3	NU	50.00000	. .60000	-Inf 50.00000	40.00000 60.00000

Känslighetsanalys från koder

Sida 2 i utdatafilen lp-ko1.bnd (rensat):

GLPK 4.44 - SENSITIVITY ANALYSIS REPORT

Problem: lpluma

Objective: obj = 36 (MAXimum)

No.	Column name	St	Activity	Obj coef Marginal	Activity range	Obj coef range	Obj va break
1	x1	BS	3.00000	4.00000 .	-Inf 6.00000	2.00000 4.50000	30 37
2	x2	BS	8.00000	3.00000 .	3.50000 10.00000	2.66667 6.00000	33 60

End of report

VILEOPT: Visual LP Optimization

Problem data

Objective function

c1: 4 c2: 3 c3: 0 c4: 0 c5: 0

Constraint coefficients

a11: 2	a12: 3	a13: 1	a14: 0	a15: 0
a21: 1	a22: 0	a23: 0	a24: 1	a25: 0
a31: 6	a32: 4	a33: 0	a34: 0	a35: 1

Right-hand-side

b1: 30 b2: 6 b3: 50

Exit (no save) <F3> Save and exit

near Programming

Iter Print PS

Welcome to VILEOPT!

No basis given.

VILEOPT: Visual LP Optimization

File Optimization Visualization Changes

Visual Linear Programming

Bas	z	x1	x2	x3	x4	x5	b
z	1	-4.000	-3.000	0	0	0	0
x3	0	2.000	3.000	1	0	0	30.000
x4	0	1	0	0	1	0	6.000
x5	0	6.000	4.000	0	0	1	50.000

Choose entering variable at the top and leaving variable to the left and hit pivot.

Basic variables: 3 4 5

Pivot

Iter Print PS Problem: fo1ex. Variables: 5. Constraints: 3.

Welcome to VILEOPT!

Basic variables: 3 4 5.

Att tänka på inför lab 1:

Skuggpris? Reducerad kostnad?

Vad händer om man gör fel i simpexmetoden?