Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning, x^*, till modellen.

Nästan alltid: Sökmetoder:
Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).
Upprepa, tills punkten är optimal.

Metoderna baseras på matematik, och vi behöver exakta definitioner.

Vad är optimum?
Punkten man står i verkar optimal. Är det det?
Vad kan man förvänta sig av olika metoder?

Optimum?

Globalt minimum: En punkt som är bäst. (rita)

Definition

En punkt x^* är **globalt** minimum i X om $f(x^*) \leq f(x)$ för alla $x \in X$.

Lokalt minimum: En punkt som är bäst för närsynta. (rita)

Definition

En punkt x^* är **lokalt** minimum i X om $f(x^*) \leq f(x)$ för alla $x \in X$ som är nära x^*. (T.ex. för alla $x \in X : \|x - x^*\| \leq \delta$.)

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Definition

En mängd X är **konvex** om $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} \in X$ för alla $x^{(1)} \in X,\ x^{(2)} \in X,\ 0 \leq \lambda \leq 1$.

"Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst."
Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.

Kombinerade mängder: Snittet av konvexa mängder är konvext. (rita)

Sats

Om X_i är konvex för alla i så är $X = \cap_i X_i$ konvex.

Exempel: Flera halvrum. Flera linjära bivillkor.

Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt "innanför" de andra. (rita)

Definition

$\hat{x}$ är en **konvexkombination** av punkterna $x^{(k)}, k = 1, \ldots, p$, om $\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}$, där $\sum_k \lambda_k = 1$ och $\lambda_k \geq 0$ för alla k.

Exempel: Mittpunkt. $\lambda_k = 1/p$.

Extrempunkt: En punkt som inte är en konvexkombination av två andra tillåtna punkter. Hörn. (rita)

Definition

$\hat{x}$ är en **extrempunkt** i X om $\hat{x} = \lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$, där $x^{(1)} \in X,\ x^{(2)} \in X$ och $0 < \lambda < 1$, endast är möjligt om $x^{(1)} = x^{(2)}$.

Exempel: Origo (under bivillkoren $x_i \geq 0$ för alla i).

Polyeder

Mängd med "raka kanter".
Polyeder: (rita)

Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel: $x_1 + x_2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Exempel: $x_1 + x_2 = 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Exempel: $Ax \le b.$

Exempel: $Ax = b,\ x \ge 0.$

En polyeder har **ändligt** många extrempunkter.

LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \ \text{ då } Ax \le b, x \ge 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

Konstant lutning på målfunktionen: Gå så långt man får åt något håll. $\Rightarrow$ Hörn.

Sats (Linjärprogrammeringens fundamentalsats)

Om ett LP-problem har begränsad optimallösning, så antas den i (minst) en extrempunkt.

Vårt första exempel

Variabeldefinition:

x_1 = antal enheter Optimus som görs varje timme.
x_2 = antal enheter Rullmus som görs varje timme.

Matematisk modell:

$$\begin{array}{llrcrcrll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \le & 30 & (1) & \text{(knappar)} \\
& & x_1 & & & \le & 6 & (2) & \text{(optik)} \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \le & 50 & (3) & \text{(monteringstid)} \\
& & x_1 & & & \ge & 0 & (4) & \\
& & & & x_2 & \ge & 0 & (5) &
\end{array}$$

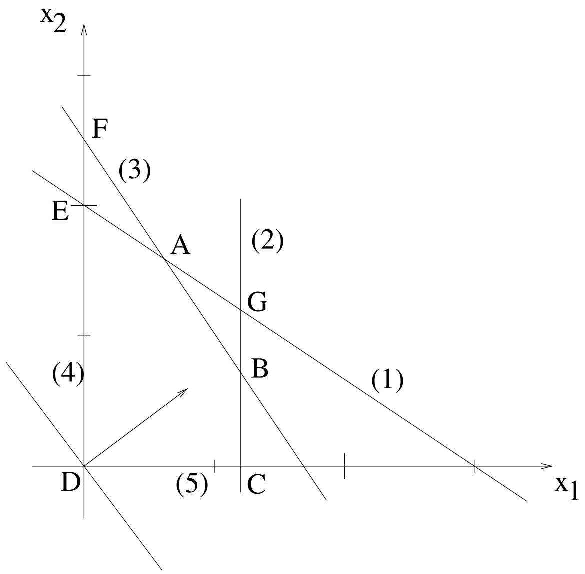
Baslösningar representerar extrempunkter

$$\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \le & 30 & (1) \\
& & x_1 & & & \le & 6 & (2) \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \le & 50 & (3) \\
& & x_1 & & & \ge & 0 & (4) \\
& & & & x_2 & \ge & 0 & (5)
\end{array}$$

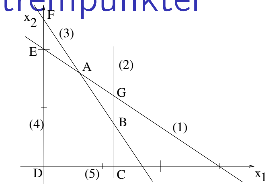
Inför slackvariabler.

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & 30 \\
& & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 6 \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 50 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \ge & 0
\end{array}$$

Baslösningar representerar extrempunkter



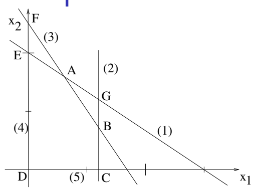
Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$
F	3,4	$x_1 = 0, x_5 = 0$	$x_2 = 25/2, x_3 = -15/2, x_4 = 6$
G	1,2	$x_3 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 6, x_5 = -10$

Punkt F och G ej tillåtna, ty negativa variabelvärden.

Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Ickebas-variabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
A	x_3, x_5	x_1, x_2, x_4	$z = 36 - 1/5x_3 - 3/5x_5$
B	x_4, x_5	x_1, x_2, x_3	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	x_2, x_4	x_1, x_3, x_5	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$z = 4x_1 + 3x_2$
E	x_1, x_3	x_2, x_4, x_5	$z = 30 + 2x_1 - x_3$

Punkt A optimal, ty negativa reducerade kostnader.

Baslösningar, hur byta

- Byt en basvariabel i taget.
- Öka ickebasvariabel med positiv reducerad kostnad. (Ökar z.)
- Gör ökningen så stor som möjligt,

  dvs. så att en basvariabel blir noll och ingen negativ.

Exempel

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = 30 \\
& & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = 6 \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = 50 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq 0
\end{array}$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5. Dvs. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 30$, $x_4 = 6$, $x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t$, $x_2 = 0$, vilket ger

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
2t & + & x_3 & & & & & = 30 \\
t & & & + & x_4 & & & = 6 \\
6t & & & & & + & x_5 & = 50
\end{array}$$

$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$

$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$

$x_5 = 50 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50/6 \approx 8.333$

Ger $t = 6$, dvs. $x_1 = 6$
och $x_3 = 30 - 12 = 18$, $x_4 = 6 - 6 = 0$, $x_5 = 50 - 36 = 14$.

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**,
sätta **icke-basvariablerna** till noll,
och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet $Ax = b$.
Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

Baslösning, teoretiskt

$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, $A = (B\ N)$, $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$.

$Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

$z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$

där $\hat{z} = c_B^T B^{-1} b$ och $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1} N)^T$, eller separat $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$

där $y = (c_B^T B^{-1})^T$.

$\hat{c}_N$ kallas **reducerade kostnader**. Baslösningen som fås för $x_N = 0$ och $x_B = B^{-1}b$ är **tillåten** om $B^{-1}b \geq 0$ och **optimal** om $\hat{c}_N \leq 0$.

Sats

Varje extrempunkt i en polyeder kan definieras av (minst) en tillåten baslösning.

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj inkommande variabel så att förbättring fås: Mest positiv reducerad kostnad, $\max_j \hat{c}_j$. (för max-problem)

Om $\hat{c}_j \leq 0$ för all j: Stopp, optimum funnet.

2. Välj utgående variabel så att tillåtenhet behålls: Minst kvot mellan högerled och positiv koefficient i inkommande kolumn, $\min_{i:\hat{a}_{ij}>0} \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \right)$.

Om $\hat{a}_{ij} \leq 0$ för alla i: Stopp, lösningen är obegränsad.

3. Byt bas (pivotera): Eliminera inkommande variabel från alla andra rader. Gå till 1.

Löst exempel

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) \\
& & x_1 & & & \leq & 6 & (2) \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Inför slackvariabler, x_3, x_4, x_5.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & 30 \\
& & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 6 \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 50 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Simplexmetoden

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & 30 \\
& & x_1 & & & & & + & x_4 & & & = & 6 \\
& & 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & + & x_5 & = & 50 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Starttablå:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-4	-3	0	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	0	30
x_4	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	6	4	0	0	1	50

Inkommande variabel: x_1. Utgående variabel: x_4.

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	-3	0	4	0	24
x_3	0	0	3	1	-2	0	18
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel: x_2. Utgående variabel: x_5.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	-1/2	3/4	69/2
x_3	0	0	0	1	5/2	-3/4	15/2
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_2	0	0	1	0	-3/2	1/4	7/2

Inkommande variabel: x_4. Utgående variabel: x_3.

Simplexmetoden

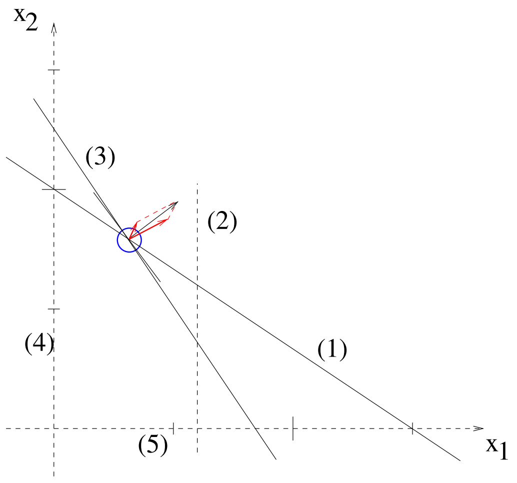
Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Ingen inkommande variabel. Optimaltablå.

Optimallösning: $x_1 = 3,\ x_2 = 8,\ z = 36$.

Slack:
Villkor 1 aktivt ($x_3 = 0$).
Villkor 2 ej aktivt ($x_4 = 3$).
Villkor 3 aktivt ($x_5 = 0$).

Simplexmetoden



Simplexmetoden, matrisform

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

0. Skaffa en tillåten startbas: $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$, $A = (B \; N)$, $c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$.
1. Beräkna B^{-1}.
2. Beräkna högerled: $\hat{b} = B^{-1}b$. Variablernas värden: $x_B = \hat{b}, x_N = 0$.
3. Beräkna målfunktionsvärdet: $z = c_B^T x_B$.
4. Beräkna skuggpriser: $y = (c_B^T B^{-1})^T$.
5. Beräkna reducerade kostnader: $\hat{c}_N = c_N - N^T y$ (dvs $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$).
6. Om $\hat{c}_N \leq 0$: Stopp, optimum.
7. Välj inkommande variabel x_k så att förbättring fås: $\hat{c}_k = \max_j \hat{c}_j$.
8. Beräkna inkommande kolumn för aktuell bas: $\hat{a}_k = B^{-1}a_k$.
9. Om $\hat{a}_k \leq 0$: Stopp, problemet har obegränsad lösning.
10. Välj utgående variabel så att tillåtenhet behålls: $\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min_{i:\hat{a}_{ik}>0} \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \right)$.
11. Byt bas: Uppdatera B, N, c_B och c_N. Gå till 1.

Simplextablån, teoretiskt

$$\begin{array}{lll} \max & z = & c^T x \\ \text{då} & & Ax + Ix_S = b \\ & & x, x_S \geq 0 \end{array}$$

Bas	z	x	x_S	$\hat{b}$
z	1	$-c^T$	$\mathbf{0}$	0
x_S	$\mathbf{0}$	A	I	b

(Starttablå)

Bas	z	x	x_S	$\hat{b}$
z	1	$c_B^T B^{-1} A - c^T$	$c_B^T B^{-1}$	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	$\mathbf{0}$	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

(Optimaltablå)

B^{-1} kan läsas ut ut optimaltablån.

Och $c_B^T B^{-1}$.

Degeneration och konvergens

Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.
- Varje iteration i simplexmetoden ger ett positivt värde på inkommande variabel, och en strikt förbättring i målfunktionsvärde.
- Man kan därför aldrig komma tillbaka till en redan besökt extrempunkt.
- Det finns ändligt många extrempunkter, så detta kan bara upprepas ett ändligt antal gånger.

Degeneration och konvergens

Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icketomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning: $\hat{b}_i = 0$.

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

Om flera basvariabler är noll: Många iterationer i samma punkt. Ingen förbättring. Samma bas *kan* återkomma.

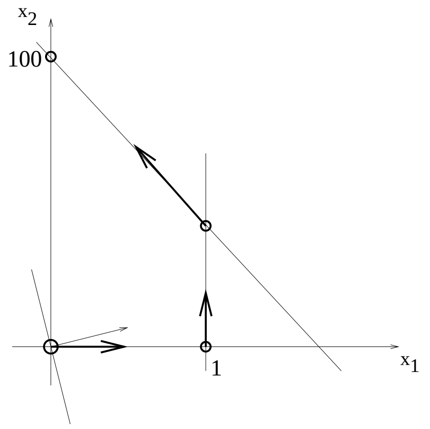
Om samma bas återkommer: Cykling!

Cykling kan förhindras genom speciella val av inkommande och utgående variabler.

Västa fall för simplexmetoden

Berömt exempel: Klee-Minty (1972)

$$\begin{array}{llrcrcr} \max & z = & 10x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & x_1 & & & \leq & 1 \\ & & 20x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Besöker *alla* extrempunkter.

Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler, n.

$$\begin{array}{llrcll} \max & z = \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j & & & & \\ \text{då} & 2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i & \leq & 100^{i-1} & i = 1, \dots, n \\ & x_j & \geq & 0 & j = 1, \dots, n \end{array}$$

Simplexmetoden kräver $2^n - 1$ iterationer.

Varje iteration kräver $O(m^2)$ (uppdatering av B^{-1}).

Empiriskt: I medel m^3 iterationer för verkliga problem.

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

y har längden m.

x_B har längden m.

Men x_N och $\hat{c}_N$ är väldigt långa. N är jättestor.

Var smart: Läs in a_j och beräkna $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ för ett j åt gången.

Släng de som inte blir inkommande, $\hat{c}_j \leq 0$.

Tag första x_j med $\hat{c}_j > 0$ som inkommande.

Resultat: Vi behöver aldrig spara något jättestort.

Kan lösa problem som är så stora att vi inte får plats med hela problemet i minnet.