

Optimum?

När man har formulerat sin optimeringsmodell vill man lösa den.

Dvs. finna en optimal lösning, x^* , till modellen.

Nästan alltid: **Sökmeter**:

Stå i en punkt, gå till en annan (bättre).

Upprepa, tills punkten är optimal.

Metoderna baseras på **matematik**, och vi behöver exakta definitioner.

Vad är optimum?

Punkten man står i verkar optimal. Är det det?

Vad kan man förvänta sig av olika metoder?

Konvexitet

Konvex mängd: Innehåller alla linjesegment mellan punkter i mängden. (rita)

Definition

En mängd X är **konvex** om $\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)} \in X$ för alla $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

“Man kan se alla punkterna i en konvex mängd från vilken punkt som helst.”

Exempel: Halvrum. Ett linjärt bivillkor.

Kombinerade mängder: Snittet av konvexa mängder är konvext. (rita)

Sats

Om X_i är konvex för alla i så är $X = \cap_i X_i$ konvex.

Exempel: Flera halvrum. Flera linjära bivillkor.

Optimum?

Globalt minimum: En punkt som är bäst. (rita)

Definition

En punkt x^* är **globalt** minimum i X om $f(x^*) \leq f(x)$ för alla $x \in X$.

Lokalt minimum: En punkt som är bäst för närsynta. (rita)

Definition

En punkt x^* är **lokalt** minimum i X om $f(x^*) \leq f(x)$ för alla $x \in X$ som är nära x^* . (T.ex. för alla $x \in X : \|x - x^*\| \leq \delta$.)

Extrempunkt

Konvexkombination: En punkt “innanför” de andra. (rita)

Definition

$\hat{x}$ är en **konvexkombination** av punkterna $x^{(k)}$, $k = 1, \dots, p$, om $\hat{x} = \sum_k \lambda_k x^{(k)}$, där $\sum_k \lambda_k = 1$ och $\lambda_k \geq 0$ för alla k .

Exempel: Mittpunkt. $\lambda_k = 1/p$.

Extrempunkt: En punkt som **inte** är en konvexkombination av två andra tillåtna punkter. Hörn. (rita)

Definition

$\hat{x}$ är en **extrempunkt** i X om $\hat{x} = \lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)x^{(2)}$, där $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$ och $0 < \lambda < 1$, endast är möjligt om $x^{(1)} = x^{(2)}$.

Exempel: Origo (under bivillkoren $x_i \geq 0$ för alla i).

Konvexa höljet

Konvexa höljet: Alla konvexkombinationer. (rita)

Sats/Definition

För en begränsad mängd S består $\text{conv}(S)$ av alla konvexkombinationer av punkter i S .

Konvexa höljet av S är den *minsta konvexa mängden* som innehåller S .

Definition

Skärningen av alla konvexa mängder som innehåller en viss mängd S kallas **det konvexa höljet** av S och betecknas med $\text{conv}(S)$.

Exempel: $S = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$.

$\text{conv}(S)$ ges av $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1$.

Polyeder

Mängd med "raka kanter".

Polyeder: (rita)

Definition

Skärningen av **ändligt** många halvrum kallas **polyeder**.

Exempel: $x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Exempel: $x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Exempel: $Ax \leq b$.

Exempel: $Ax = b, x \geq 0$.

En polyeder har **ändligt** många extrempunkter.

Varför är konvexitet intressant?

Ett lokalt optimum i ett konvext problem är alltid ett globalt optimum!

LP-problem

Ett **LP-problem**:

$$\max z = c^T x \quad \text{då } Ax \leq b, x \geq 0.$$

Den tillåtna mängden är en polyeder och konvex. Målfunktionen är linjär.

Var ligger optimum?

Konstant lutning på målfunktionen. Gå så långt man får åt något håll. $\Rightarrow$ Hörn.

Sats (Linjärprogrammeringens fundamentalsats)

Om ett LP-problem har begränsad optimallösning, så antas den i (minst) en extrempunkt.

Vårt första exempel

Variabeldefinition:

x_1 = antal enheter Optimus som görs varje timme.

x_2 = antal enheter Rullmus som görs varje timme.

Matematisk modell:

$$\begin{array}{llllll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 & (1) & (\text{knappar}) \\ & & x_1 & & & \leq & 6 & (2) & (\text{optik}) \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & \leq & 50 & (3) & (\text{monteringstid}) \\ & & x_1 & & & \geq & 0 & (4) \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & (5) \end{array}$$

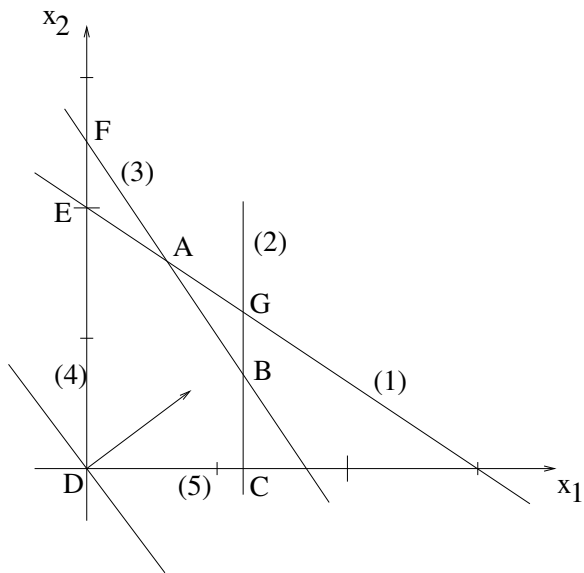
Baslösningar representerar extrempunkter

max $z = 4x_1 + 3x_2$
då $2x_1 + 3x_2 \leq 30$ (1)
 $x_1 \leq 6$ (2)
 $6x_1 + 4x_2 \leq 50$ (3)
 $x_1 \geq 0$ (4)
 $x_2 \geq 0$ (5)

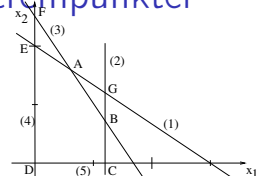
Inför slackvariabler.

max $z = 4x_1 + 3x_2$
då $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30$
 $x_1 + x_4 = 6$
 $6x_1 + 4x_2 + x_5 = 50$
 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Baslösningar representerar extrempunkter



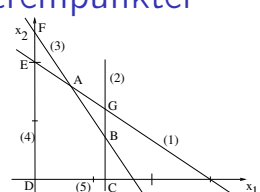
Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Aktiva bivillkor	Variabler som sätts till noll	Variabler som löses ut
A	1,3	$x_3 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 3, x_2 = 8, x_4 = 3$
B	2,3	$x_4 = 0, x_5 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 7/2, x_3 = 15/2$
C	2,5	$x_2 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_3 = 18, x_5 = 14$
D	4,5	$x_1 = 0, x_2 = 0$	$x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$
E	1,4	$x_1 = 0, x_3 = 0$	$x_2 = 10, x_4 = 6, x_5 = 10$
F	3,4	$x_1 = 0, x_5 = 0$	$x_2 = 25/2, x_3 = -15/2, x_4 = 6$
G	1,2	$x_3 = 0, x_4 = 0$	$x_1 = 6, x_2 = 6, x_5 = -10$

Punkt F och G ej tillåtna, ty negativa variabelvärden.

Baslösningar representerar extrempunkter



Hörn-punkt	Icke-bas-variabler (=0)	Basvariabler	Målfunktion
A	x_3, x_5	x_1, x_2, x_4	$z = 36 - 1/5x_3 - 3/5x_5$
B	x_4, x_5	x_1, x_2, x_3	$z = 69/2 + 1/2x_4 - 3/4x_5$
C	x_2, x_4	x_1, x_3, x_5	$z = 24 + 3x_2 - 4x_4$
D	x_1, x_2	x_3, x_4, x_5	$z = 4x_1 + 3x_2$
E	x_1, x_3	x_2, x_4, x_5	$z = 30 + 2x_1 - x_3$

Punkt A optimal, ty negativa reducerade kostnader.

- Byt en basvariabel i taget.
- Öka ickebasvariabel med positiv reducerad kostnad. (Ökar z .)
- Gör ökningen så stor som möjligt, dvs. så att en basvariabel blir noll och ingen negativ.

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 \\ \text{då} & & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & = & 30 \\ & & x_1 & & & & + & x_4 & & = & 6 \\ & & 6x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_5 & = & 50 \\ & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Basvariabler: x_3, x_4, x_5 . Dvs. $x_1 = 0, x_2 = 0$ och $x_3 = 30, x_4 = 6, x_5 = 50$.

Öka x_1 (verkar bäst). Sätt $x_1 = t, x_2 = 0$, vilket ger

$$\begin{array}{rcll} 2t & + & x_3 & = & 30 \\ t & & & + & x_4 & = & 6 \\ 6t & & & & + & x_5 & = & 50 \end{array}$$

$$x_3 = 30 - 2t \geq 0 \Rightarrow t \leq 30/2 = 15$$

$$x_4 = 6 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 6$$

$$x_5 = 50 - 6t \geq 0 \Rightarrow t \leq 50/6 \approx 8.333$$

Ger $t = 6$, dvs. $x_1 = 6$

och $x_3 = 30 - 12 = 18, x_4 = 6 - 6 = 0, x_5 = 50 - 36 = 14$.

Baslösning, teoretiskt

Definition

En **baslösning** fås genom att välja ut m **basvariabler**, sätta **icke-basvariablerna** till noll, och lösa ut basvariablerna mha ekvationssystemet $Ax = b$. Baslösningen är **tillåten** om alla basvariabler får icke-negativa värden.

$x = (x_B, x_N)$, $A = (B \ N)$. $Bx_B + Nx_N = b$ ger $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$. Eliminera x_B från målfunktionen: $z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$ där $\hat{z} = c_B^T B^{-1}b$ och $\hat{c}_N = c_N - (c_B^T B^{-1}N)^T$.

$\hat{c}_N$ kallas **reducerade kostnader**. Baslösningen som fås för $x_N = 0$ och $x_B = B^{-1}b$ är **tillåten** om $B^{-1}b \geq 0$ och **optimal** om $\hat{c}_N \leq 0$.

Sats

Varje extrempunkt i en polyeder kan definieras av (minst) en tillåten baslösning.

Simplexmetoden

Börja med att skriva problemet på likhetsform (inför slackvariabler).

0. Skaffa en tillåten startbas.

1. Välj **inkommande** variabel så att **förbättring** fås: Mest positiv reducerad kostnad, $\max_j \hat{c}_j$. (för max-problem)

Om $\hat{c}_j \leq 0$ för all j : Stopp, optimum funnet.

2. Välj **utgående** variabel så att **tillåtenhet** behålls: Minst kvot mellan högerled och positiv koefficient i inkommande kolumn, $\min_{i: \hat{a}_{ij} > 0} \left(\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ij}} \right)$.

Om $\hat{a}_{ij} \leq 0$ för alla i : Stopp, lösningen är obegränsad.

3. Byt bas (pivotera): Eliminera inkommande variabel från alla andra rader. Gå till 1.

Löst exempel

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \quad (1) \\ & x_1 \leq 6 \quad (2) \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 50 \quad (3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Inför slackvariabler, x_3, x_4, x_5 .

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ & x_1 + x_4 = 6 \\ & 6x_1 + 4x_2 + x_5 = 50 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexmetoden

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{då} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ & x_1 + x_4 = 6 \\ & 6x_1 + 4x_2 + x_5 = 50 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Starttablå:

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-4	-3	0	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	0	30
x_4	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	6	4	0	0	1	50

Inkommande variabel: x_1 . Utgående variabel: x_4 .

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	-3	0	4	0	24
x_3	0	0	3	1	-2	0	18
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_5	0	0	4	0	-6	1	14

Inkommande variabel: x_2 . Utgående variabel: x_5 .

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	-1/2	3/4	69/2
x_3	0	0	0	1	5/2	-3/4	15/2
x_1	0	1	0	0	1	0	6
x_2	0	0	1	0	-3/2	1/4	7/2

Inkommande variabel: x_4 . Utgående variabel: x_3 .

Simplexmetoden

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/5	0	3/5	36
x_4	0	0	0	2/5	1	-3/10	3
x_1	0	1	0	-2/5	0	3/10	3
x_2	0	0	1	3/5	0	-1/5	8

Ingen inkommande variabel. Optimaltablå.

Optimallösning: $x_1 = 3, x_2 = 8, z = 36$.

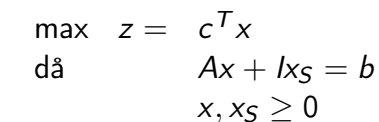
Slack:

Villkor 1 aktivt ($x_3 = 0$).

Villkor 2 ej aktivt ($x_4 = 3$).

Villkor 3 aktivt ($x_5 = 0$).

Simplextablån, teoretiskt



Bas	z	x	x_S	$\hat{b}$
z	1	$c_B^T B^{-1} A - c^T$	$c_B^T B^{-1}$	$c_B^T B^{-1} b$
x_B	0	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$

(Optimaltablå)

$$\text{Och } c_B^T B^{-1}.$$

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

Skriv problemet på likhetsform (inför slackvariabler), $Ax = b$.

- ### Definition

En baslösning där en eller flera basvariabler har värdet noll kallas **degenererad** baslösning.

Om inga baslösningar är degenererade:

- Varje extrempunkt motsvaras av exakt en baslösning.
- Varje iteration i simplexmetoden ger ett positivt värde på inkommande variabel, och en strikt förbättring i målfunktionsvärde.
- Man kan därför aldrig komma tillbaka till en redan besökt extrempunkt.
- Det finns ändligt många extrempunkter, så detta kan bara upprepas ett ändligt antal gånger.

Degeneration och konvergens

Sats

Om det tillåtna området till ett LP-problem är icke tomt, och inga baslösningar är degenererade, så kommer simplexmetoden att avslutas inom ett ändligt antal iterationer.

I en degenererad baslösning: $\hat{b}_i = 0$.

Kan ge minsta kvot noll. Högerleden ändras då ej. Inkommande variabel ökas ej. En annan baslösning ger samma punkt.

Om flera basvariabler är noll: Många iterationer i samma punkt. Ingen förbättring. Samma bas *kan* återkomma.

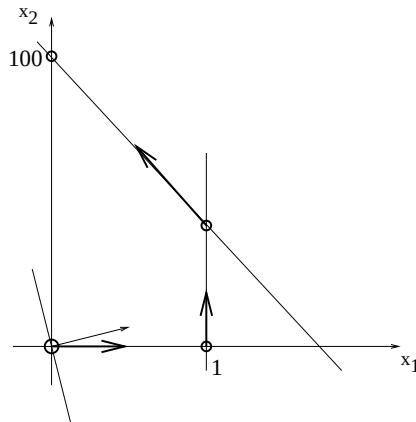
Om samma bas återkommer: Cykling!

Cykling kan förhindras genom speciella val av inkommande och utgående variabler.

Västa fall för simplexmetoden

Berömt exempel: Klee-Minty (1972)

$$\begin{array}{llll} \max & z = & 10x_1 & + & 3x_2 \\ \text{då} & & x_1 & & \leq & 1 \\ & & 20x_1 & + & x_2 & \leq & 100 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Besöker *alla* extrempunkter.

Västa fall för simplexmetoden

Öka antalet variabler, n .

$$\begin{array}{ll} \max & z = \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j \\ \text{då} & 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} + x_i \leq 100^{i-1} \quad i = 1, \dots, n \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array}$$

Simplexmetoden kräver $2^n - 1$ iterationer.

Varje iteration kräver $O(m^2)$ (uppdatering av B^{-1}).

Empiriskt: I medel m^3 iterationer för verkliga problem.

Simplexmetoden för stora problem

Antag att vi har jättemånga variabler (n), men inte så många bivillkor (m).

Notera att B (och B^{-1}) har storleken $m \times m$.

y har längden m .

x_B har längden m .

Men x_N och $\hat{c}_N$ är väldigt långa. N är jättestor.

Var smart: Läs in a_j och beräkna $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$ för ett j åt gången.

Släng de som inte blir inkommande, $\hat{c}_j \leq 0$.

Tag första x_j med $\hat{c}_j > 0$ som inkommande.

Resultat: Vi behöver aldrig spara något jättestort.

Kan lösa problem som är så stora att vi inte får plats med hela problemet i minnet.