

Komplexitet

Teoretisk bas för frågorna:

- Är en viss metod bra eller dålig?
- Är ett visst problem lätt eller svårt?

Teori och praktik inte alltid överens, men i stort sett. . .

Algoritmkomplexitet:

Hur många operationer krävs, som funktion av indatas storlek, i värsta fall?
(Problemstorlek $\rightarrow \infty$, alla möjliga koefficienter.)

Definition

En **polynomisk algoritm** har polynomisk tidkomplexitet som funktion av indatastorleken. (Bra, dvs. snabb)

En **exponentiell algoritm** har exponentiell tidkomplexitet som funktion av indatastorleken. (Dålig, dvs. långsam)

En **pseudopolynomisk algoritm** har polynomisk tidkomplexitet som funktion av indatastorleken och en (största) *konstant* i indata.

Algoritmkomplexitet

Exempel 1: Dijkstras metod i en graf med n noder:

Varje nod märks permanent *en* gång, alltså behövs n permanenta märkningar.

För varje permanent märkning, behöver man löpa igenom alla n noderna (2 gånger).

Komplexiteten blir $O(n^2)$, och algoritmen är polynomisk.

Exempel 2: Genomlöpa alla hörn i en hyperkub i n dimensioner:
 $O(2^n)$. Exponentiell algoritm.

Exempel 3: Edmonds-Karps metod för maxflödesproblemet:

I varje iteration: Dijkstras metod: $O(n^2)$.

Hur många iterationer?

Minst en enhet till i varje iteration. Alltså högst f^* iterationer.

Uppskattning av f^* : $\tilde{f} = \sum_{(i,j) \in B} u_{ij}$. Komplexitet: $O(\tilde{f}n^2)$.

Pseudopolynomisk metod.

Problemkomplexitet

Vilken tidskomplexitet har den **bästa kända metoden** för problemet?

Optimeringsversionen: Finn optimala (tillåtna) lösningen.

Evalueringsversionen: Finn kostnaden för den optimala lösningen.

Vittnesversionen: Finn en tillåten lösning som har $c^T x \leq L$.

Igenkänningsversionen: Finns det en tillåten lösning som har $c^T x \leq L$?
(Svar: Ja eller nej.)

Problemkomplexitet

Sats

Om igenkänningsversionen inte är polynomiskt lösbar, så är inte vittnes-, evaluerings- eller optimeringsversionen det.

Sats

Om igenkänningsversionen är polynomiskt lösbar, så är även vittnesversionen det.

Sats

Om igenkänningsversionen är polynomiskt lösbar, och $0 \leq c^T x^* \leq 2^{p(n)}$, där $p(n)$ är ett polynom, så är även evaluerings- och optimeringsversionen polynomiskt lösbara.

(Använd intervallhalvering på $L = c^T x^*$.)

Fokusera på igenkänningsversionen.

Definition

P är den klass av igenkänningsproblem som kan lösas (besvaras) av en polynomisk algoritm.

Definition

NP är den klass av igenkänningsproblem där ett ja-svar kan bekräftas på polynomisk tid.

Om svaret till igenkänningsproblemet är ja, så måste det finnas en lösning, som kan kontrolleras på polynomisk tid.

Exempel på problem i NP :

- Finns en handelsresandetur (Hamiltoncykel) med kostnaden mindre eller lika med L ?
- Finns en delmängd S av $\{1, 2, \dots, n\}$ sådan att $\sum_{j \in S} a_j = b$?

Komplexitet: Polynomiska relationer

Polynomisk reduktion från A till B : Lös problem A genom att anropa en subrutin, som löser B , ett polynomiskt antal gånger.

Sats

Om det finns en polynomisk algoritm för B , och A kan reduceras polynomiskt till B , så finns det en polynomisk algoritm för A .

Polynomisk transformation från A till B : Konstruera ett exempel av B ur ett exempel av A på polynomisk tid, så att exemplet av B ger ja-svar om och endast om exemplet av A ger ja-svar.

Definition

Ett igenkänningsproblem $A \in NP$ är **NP -fullständigt** om alla andra problem i NP har en polynomisk transformation till A .

Sats

$P \subseteq NP$.

Är $P = NP$? Njae.

Många har försökt bevisa det, men ingen har lyckats.

Bl.a. V. F. Romanov, som ger en polynomisk algoritm för 3-SAT-problemet, vilket skulle betyda att $P = NP$.

Artikeln innehåller dock flera oklarheter.

Ett *bevis* för att $P \neq NP$ vore mindre överraskande, eftersom alla tror det.

Vinay Deolalikar säger sig, i augusti 2010, ha bevisat detta.

Man har dock hittat några möjligtvis fatala fel i artikeln.

Komplexitet: NP -fullständighet

För att bevisa att ett problem, A , är NP -fullständigt:

1. Visa att problemet A tillhör NP .
2. Visa att alla andra problem i NP kan transformeras polynomiskt till A .

(Men hur gör man det?)

- 2: Visa att ett NP -fullständigt problem kan transformeras polynomiskt till A .

Obs: Om man skulle hitta en polynomisk algoritm för **ett** enda NP -fullständigt problem, så har man bevisat att $P = NP$.

Slutsats

Det finns ingen polynomisk algoritm för något NP -fullständigt problem (om inte $P = NP$).

Definition

Ett problem A kallas **NP-svårt**, om något NP-fullständigt problem kan transformeras polynomiskt till A , men vi ej kan visa att $A \in NP$.

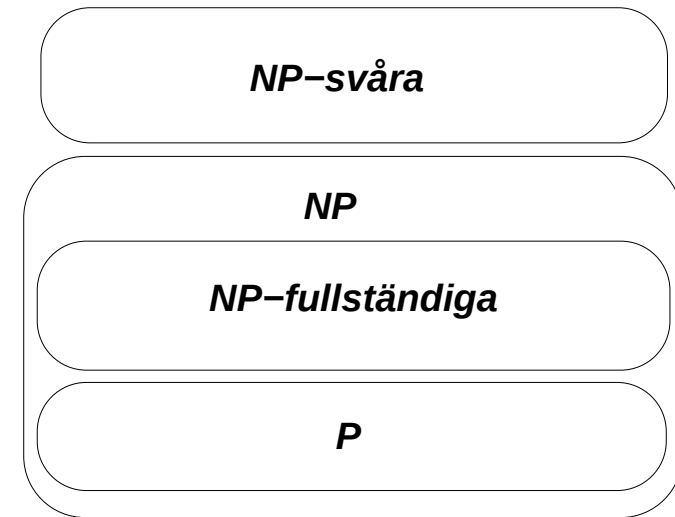
NP-svår minst lika svår som NP-fullständig.

Om $0 \leq c^T x^* \leq 2^{p(n)}$ inte gäller, kan man ej visa att optimeringsversionen tillhör NP.

Ofta: Igenkänningsversionen NP-fullständig, optimeringsversionen NP-svår.

Slutsats

Det finns ingen polynomisk algoritm för något NP-svårt problem (om inte $P = NP$).



Vilka problem är NP-fullständiga/NP-svåra?

Satisfieringsproblemet: (SAT) Finns en tilldelning av värden till n logiska variabler, så att en boolsk formel med m satser blir *sann*?

Bevisat NP-fullständigt av Cook 1971.

Binära heltalsproblemet: (BHP) Finns en binär n -vektor, x , som uppfyller $Ax \geq b$?

SAT kan transformeras polynomiskt till BHP.

Allmänna heltalsproblemet: (HP) Finns en ickenegativ, heltalig n -vektor, x , som uppfyller $Ax \geq b$, $x \leq u$?

Transformation från BHP: Ersätt heltalsvariabler med binära, $x_j = \sum_i 2^i y_{ij}$.

Flera NP-fullständiga/NP-svåra problem

- Existerar en (o)riktad Hamiltonväg/cykel?
- Handelsresandeproblemet (olika varianter).
- Kappsäcksproblemet.
- Steinerträdsproblemet.
- Minkostnadsflödesproblemet med olika varusorter.
- Valensbegränsade billigaste uppspännande träd-problem (VMST): Finns det ett uppspännande träd med $c^T x \leq L$ där ingen nod har valens större än K ?

- Finns en oberoende nodmängd med minst K noder?
- Finns en nodövertäckning med högst K noder?
- Kan noderna färgas med högst K olika färger, så att inga två närliggande noder har samma färg?
- Finns det ett snitt med *minst* kapacitet K i ett nätverk med kapaciteter?
- Innehåller en graf en "klick" (fullständig subgraf) med minst K noder?
- Billigaste-enkla-vägproblemet: Finns en enkel väg från start- till slutnod med $c^T x \leq L$?
- ... samt ca 3000 till.

"Smarta" metoder som ger "skapliga" lösningar.

Ger ej garanterat optimum.

Men kan göra det om man har tur. (Fast det vet man inte.)

Snabbare än optimerande metoder.

Enda möjligheten för riktigt stora svåra problem.

Ofta: *NP*-svårt problem, polynomisk heuristik.

Heuristiker

Modifiseringar av trädsökningsmetoder:

- Kapa grenar då $(\bar{z} - \underline{z})/\bar{z} \leq \varepsilon$.
- Kapa grenar då $\bar{z} - \underline{z} \leq \varepsilon$.
- Avbryt då den första tillåtna lösningen erhålls.

Men metoden fortfarande exponentiell.

Kappsäcksproblemet kan lösas med DynP i pseudopolynomisk tid. Definiera ett tillstånd för varje värde av b .

Snabba upp genom *trunkering* av koefficienter. Definiera ett tillstånd för vart tionde värde av b .

Heuristiker: Giriga metoder

Giriga metoder är snabba, men löser bara vissa enkla problem (matroider) optimalt.

(Kruskal löser MST.)

De kan dock användas som heuristik för många problem.

Kappsäcksproblemet:

Sortera kvoterna c_j/a_j . Fyll på med bästa först.

Löser LP-relaxationen exakt.

Samma metod på heltalsproblemet (dvs avrunda neråt), kan ge upp till 100% relativt fel.

$\max z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$ då $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 6$, $x_j \in \{0,1\}$ för alla j

Kvoter: $x_1 : 3/2$, $x_2 : 4/3$, $x_3 : 5/4$

ger lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, och $z = 7$.

Optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $z = 8$.

$\max z = 3x_1 + 100x_2$ då $2x_1 + 99x_2 \leq 100$, $x_j \in \{0,1\}$ för alla j

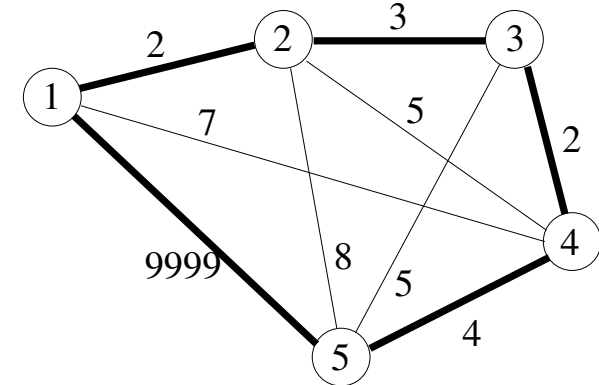
Kvoter: $x_1 : 3/2$, $x_2 : 100/99$ ger lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ och $z = 3$.

Optimum: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $z = 100$.

Närmaste granne-algoritmen:

Partiell handelsresandetur, utöka med en nod i taget.

Lägg till närmaste grannen till sista noden i turen.



Kan fallera helt för icke fullständig graf.

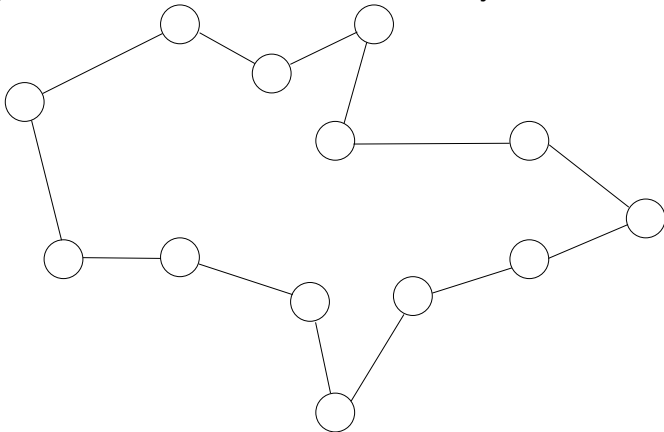
Heuristiker för handelsresandeproblemet

Närmaste sammanslagings-algoritmen:

Flera partiella turer som successivt slås samman.

Slå ihop de turer som ligger närmast varandra: $\min_{k,l} (\min_{i \in T_k, j \in T_l} c_{ij})$,

och välj bägar att ta bort så att kostnaden för nya turen blir minimal.



Heuristiker för handelsresandeproblemet

Insättnings-algoritmer

(en tur som utökas med en nod i taget):

- Närmaste additions-algoritmen, $O(n^2)$.
(Lägg till en viss ny nod intill en given nod i turen.)
- Närmaste insättnings-algoritmen, $O(n^2)$.
(Lägg till en viss ny nod på bästa ställe i turen.)
- Billigaste additions-algoritmen, $O(n^2 \log_2(n))$.
(Lägg till den nya nod som ger lägsta kostnad.)

$$z_H \leq 2z^*.$$

Utnyttja problemets struktur.

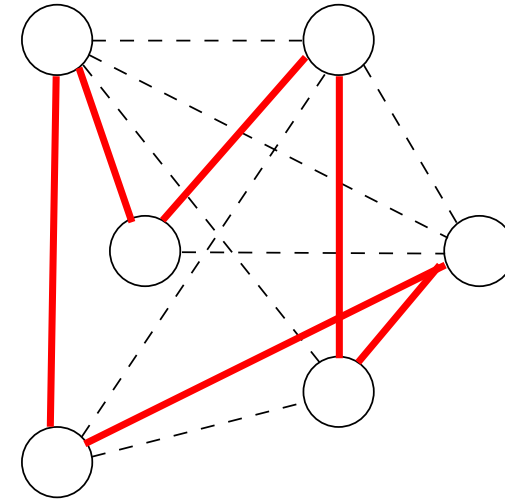
Trädalgoritmen för handelsresandeproblemet Δ TSP:

1. Finn billigaste uppspännande träd.
2. Konstruera en graf med parallella bågar genom att dubblera varje båge i trädet.
3. Finn en Eulercykel.
4. Transformera Eulercykeln till en Hamiltoncykel (genom att ta genvägar vid återbesök).

Komplexitet: $O(n^2)$ (Prim, steg 1).

Målfunktionsvärdet: $z_{MST} \leq z^*$, $z_E = 2z_{MST}$, $z_H \leq z_E \Rightarrow z_H \leq 2z^*$.

Sämrre för TSP utan Δ .



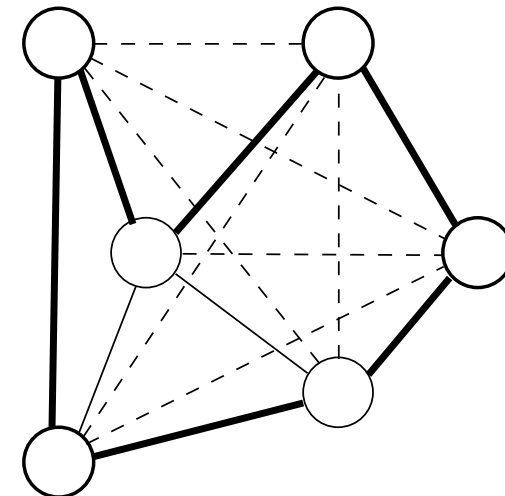
Heuristiker för handelsresandeproblemet

Christofides algoritm: Addera bara bågar till noder med udda valens.

1. Finn billigaste uppspännande träd T .
2. Finn alla noder som har udda valens i T och finn den billigaste perfekta matchningen M i den fullständiga grafen med dessa noder.
3. Finn en Eulercykel i $T + M$ och den handelsresandetur den innehåller.

Steg 2: Matchningsproblem, $O(n^4)$.

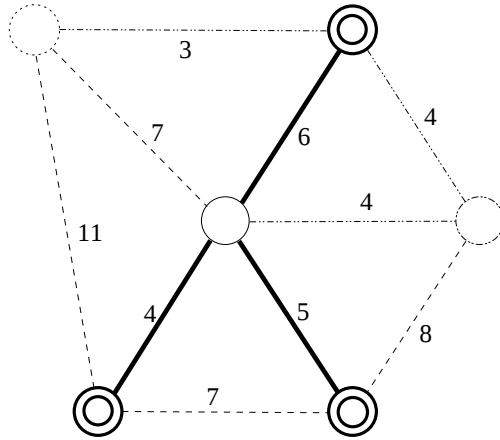
$z_H \leq 3/2z^*$ för Δ TSP.



Heuristiker för handelsresandeproblemet

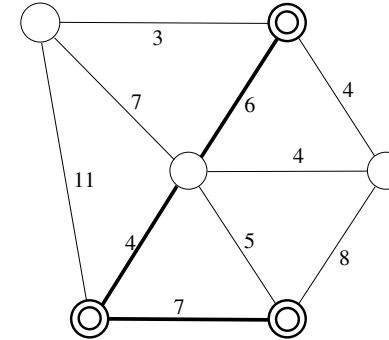
Heuristiker för Steinerträdsproblemet

1. Finn billigaste uppspannande träd.
2. Ta bort alla noder $i \notin N'$ (dvs. som inte måste besökas) som har valens *ett* (samt anslutande båge).
3. För varje nod $i \notin N'$ som har valens *två*, kontrollera om det är billigare att använda direktbågen istället för att besöka nod i .



Heuristiker för Steinerträdsproblemet

1. Kalla en nod i N' för S .
2. Finn den nod i $N' \setminus S$ som ligger närmast S .
3. Lägg till den funna billigaste vägen till lösningen, samt de noder som ingår i vägen till S , och upprepa detta tills alla noder i N' är med i lösningen.



Heuristiker för hinkpackningsproblemet

Första plats ("First fit"): Placera nästa objekt i den hink längst till vänster där den får plats.

Sista plats ("Last fit"): Placera nästa objekt i den hink längst till höger där den får plats.

Nästa plats ("Next fit"): Placera nästa objekt i hinken längst till höger (även om en ny krävs).

Bästa plats ("Best fit"): Placera nästa objekt i den fullaste hink där den får plats.

Värsta plats ("Worst fit"): Placera nästa objekt i den tommaste använda hinken.

Näst värsta plats ("Almost worst fit"): Placera nästa objekt i den näst tommaste hinken.

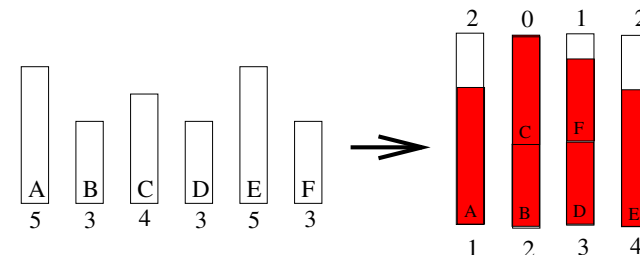
Förbättring: Sortera först objekten, så att de tyngsta kommer först.

Första/bästa plats: $z_H \leq 17/10 z^* + 2$.

Sorterad första/bästa plats: $z_H \leq 11/9 z^* + 4$.

Heuristiker för hinkpackningsproblemet

Första plats



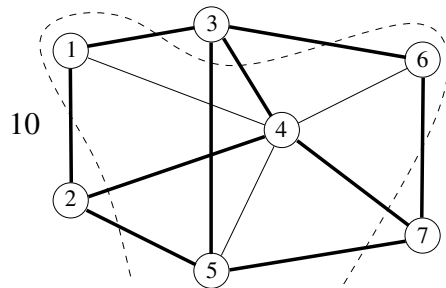
Undre gräns. $\lceil \frac{23}{7} \rceil = 4$. Optimum.

Heuristiker för maxsnittsproblemet

Maxsnittsproblemet: Finn ett snitt genom en oriktad graf så att antalet bågar som passerar snittet är maximalt.

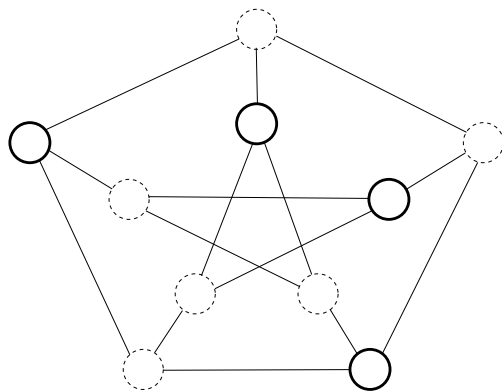
1. Starta med valfritt snitt.
2. Flytta över en nod till andra sidan snittet om detta förbättrar lösningen (dvs. ökar antalet bågar över snittet).
3. Upprepa tills ingen flyttning av en enskild nod ger någon förbättring.

$$z^* \leq 2z_H.$$



Heuristik för maximal oberoende nodmängd

Ta med nästa nod om det går. Märk anslutande noder (får ej tas med).



Heuristiker för andra grafproblem

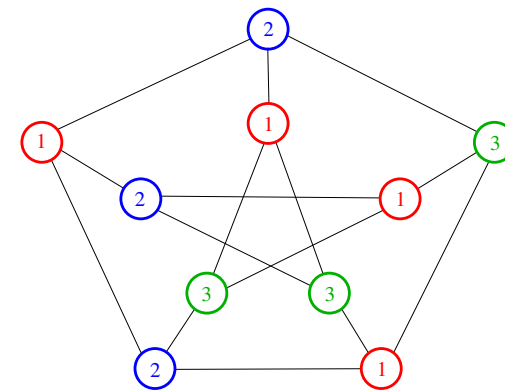
Ofta ganska självklara:

Ta noderna/bågarna i nummerordning. Bygg upp lösningen girigt.

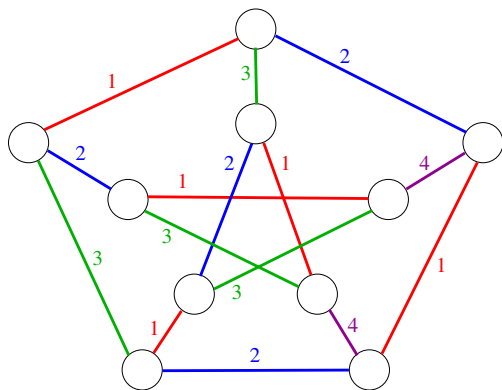
- Maximal oberoende nodmängd: Ta med nästa nod om det går. Märk anslutande noder (får ej tas med).
- Nodfärgning med min antal färger: Färga nästa nod med lägsta möjliga färg.
- Bågfärgning med min antal färger: Färga nästa båge med lägsta möjliga färg.
- Minimal nodövertäckning: Ta med noden med maximal valens. Ta bort alla anslutande bågar.
- Minimal nodövertäckning: Finn maximal matchning, ta med alla ändnoder till bågar i matchningen.
- Minimal bågövertäckning: Finn maximal matchning, fyll på med bågar till omatchade noder.

Heuristik för minimal nodfärgning

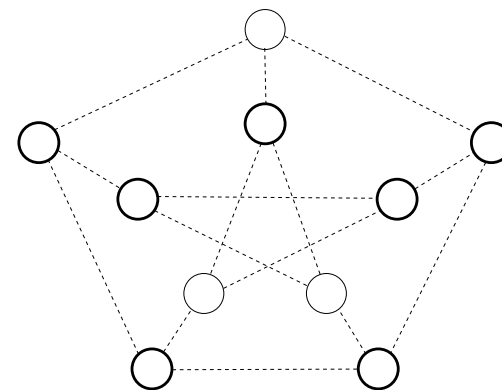
Färga nästa nod med lägsta möjliga färg.



Färga nästa båge med lägsta möjliga färg.



Ta med noden med maximal valens. Ta bort alla anslutande bågar.



Lokalsökning

Hoppa från en punkt till en bättre granne. Upprepa.

Definiera **omgivning** N (närliggande punkter, grannar), mha avståndsmått samt avståndsgräns.

Exempel:

- Euklidiskt närmaste punkterna.
- Utbyte av element, t ex bågar, noder.
- Byte av 0 mot 1 och vv.

Genomsök omgivningen efter en bättre punkt.

0. Finn startpunkt $x^{(k)} \in X$. Sätt $k = 0$.

1. Genomsök $N(x^{(k)})$ efter en punkt $\bar{x}$ med $f(\bar{x}) < f(x^{(k)})$.

2. Om ingen finns: Stopp, $x^{(k)}$ är lokalt optimum.

3. Annars sätt $x^{(k+1)} = \bar{x}$. Sätt $k = k + 1$ och gå till 1.

Lokalsökning

Varianter för bivillkor:

- Endast tillåtna punkter.
- Även otillåtna punkter. Lägg till strafffunktion till målfunktionen.

Klättringsstrategier:

- Finn bästa punkten i hela omgivningen.
- Finn bästa punkten i delmängd av omgivningen.
- Finn första bättre punkten.
- Finn första bättre punkten i delmängd av omgivningen.

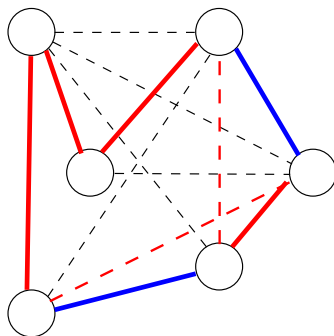
Lokalsökning

Omgivning för handelsresandeproblemet:

2-byte: Ta bort två bågar och sätt dit två nya.

3-byte: Ta bort tre bågar och sätt dit tre nya.

Def: Lokalt optimum map viss omgivning. (T ex 2-bytes-optimum.)



Utvidgningar av lokalsökning

Itererad lokalsökning: Gör många sökningar med olika startpunkter.

Hur välja startpunkter? Gammalt: Slumpmässigt.

Nyare: Baserat på tidigare optimum. Försök få annat opt.

Variabel omgivning (Variable Neighborhood Search, VNS):

Byt omgivning då och då.

Ett lokalt optimum i en omgivning är kanske inte ett lokalt optimum i en annan omgivning, men ett globalt optimum är lokalt optimum i alla omgivningar.

Stora omgivningar (Very Large Scale Neighborhood Search, VLSN):

Eftersom vi byter omgivning, kan man använda större omgivningar.

Utvidgningar av lokalsökning

“Förstör - reparera” (LNS, Large Neighborhood Search):

Förstör en lösning genom att ta bort en viss del av den, och reparera den genom att sätta dit andra delar.

Ta bort delar slumpmässigt, och reparera med en girig heuristik.

Girig slumpmässig adaptiv sökning (GRASP, Greedy Randomized Adaptive Search Procedure):

Giriga slumpmässiga lösningar förbättras med lokalsökning.

Lösningar som är bra placeras i en kortare lista, ur vilken punkter slumpmässigt väljs.

Tabusökning

Utvidgning av lokalsökning.

För att ej fastna i lokalt optimum: Tillåt **temporär försämring**.

Förbjud förflyttningar till nyss besökt grannar. Spara tidigare förflyttningar (besökta punkter) i en **tabulista**, av viss längd (kö).

1. Välj startpunkt, $x^{(0)} \in X$. Sätt $k = 0$. Börja med en tom tabulista.
2. Välj en sökmängd $A(x^{(k)}) \subseteq N(x^{(k)})$ av punkter **som ej är tabu**.
3. Finn nästa punkt, $x^{(k+1)}$, mha $\min_{x \in A(x^{(k)})} f(x)$.
4. Uppdatera tabulistan: Tillför $x^{(k)}$. Om listan är full, ta bort äldsta punkten.
5. Stoppa om $k > K$. Annars sätt $k = k + 1$ och gå till 2.

Simulerad kylning

(Härma fysikaliskt förlopp: Långsam kylning av metall.)

Acceptera försämring med viss sannolikhet, $e^{-\Delta/T}$, där T är "temperaturen" som långsamt minskas.

1. Välj en startpunkt, $x^{(0)} \in X$. Sätt $k = 0$.
Välj en starttemperatur, T , och en kylfaktor, $r : 0 < r < 1$.
2. Sätt $l = 0$.
 3. Välj en slumpmässig granne, $\bar{x} \in N(x^{(k)})$.
 4. Beräkna ändringen $\Delta = f(\bar{x}) - f(x^{(k)})$.
 5. Om $\Delta \leq 0$ (bättre), sätt $x^{(k+1)} = \bar{x}$. Gå till 5.
 6. Om $\Delta > 0$ (sämre), sätt $x^{(k+1)} = \bar{x}$ med sannolikheten $e^{-\Delta/T}$.
 7. Sätt $l = l + 1$. Om $l \leq L$, gå till 3.
8. Reducera temperaturen: Sätt $T = rT$.
9. Stoppa om systemet är "fruset". Annars sätt $k = k + 1$, $l = 0$, gå till 2.

Genetiska algoritmer

(Härma biologiskt förlopp: Evolution av en population.)

En **population** av lösningar uppdateras genom vissa operationer, så att bra lösningar har större chans att överleva. Nya punkter bildas genom "crossover" (kombination av två "föräldrar" ger två "barn"), samt genom "immigration"/"mutation" (helt nya införs). De bästa ("eliten") från förra populationen sparas.

Följande steg genomgås:

Evaluering: Beräkning av kvaliteten av varje individ (målfunktionsvärde).

Föräldraval: Vissa par av lösningar (föräldrar) väljes, baseras på deras kvalitet.

Crossover: Varje föräldrapar kombineras till en eller två nya lösningar (barn).

Mutation: Några av barnen förändras slumpmässigt.

Populationsurval: Val av en ny population (baserat på kvalitet) genom att vissa barn ersätter lika många av den gamla populationen.

Myroptimering

Myror vandrar omkring slumpmässigt, tills de hittar mat.

När de återvänder till myrstacken, lämnar de ett doftspår på marken.

När andra myror stöter på detta doftspår, följer de spåret (för att öka sannolikheten att finna mat).

Fler och fler myror följer spåret och doftspåret blir starkare, så länge det finns mat där.

När det inte längre finns mat där, kommer doftspåret att försvinna.

Framgångsrika vägar kommer att användas mer och mer, medan andra vägar blir mer oanvända.

Ant Colony Optimization: Gör så för att hitta optimala vägar i stora nätverk.

Partikelsvärmoptimering

Particle Swarm Optimization, PSO:

En "svärm" av lösningar ("partiklar") uppdateras med enkla matematiska formler baserade på position och hastighet.

Jämför med fågelsvärmar som rör sig i skyn, som antas ha någon sorts "svärmintelligens" som leder dem rätt.

Rörelserna baseras på en partikels bästa position men också på hela svärmens bästa position.

När nya bästa positioner uppnås, påverkas svärmens rörelser.

Metoden prestanda beror på en balans mellan "exploration" och "exploitation", dvs. mellan att leta i nya områden och att intensifiera sökningen i ett lovande område.

Sökmotod för ickedifferentierbar funktion

Nelder-Meads metod

- 1 Starta med $n + 1$ (linjärt oberoende) punkter (en simplex).
- 2 Finn den sämsta punkten, $\tilde{x}$.
- 3 Finn mittpunkten av de n bästa, $\bar{x}$.
- 4 Beräkna riktningen: $\Delta x = \bar{x} - \tilde{x}$.
- 5 Ersätt den sämsta punkten med $x = \bar{x} + \Delta x$. (Vippa simplexen.)
- 6 Gå till 2.

Extrafinesser (ändra form på simplexen):

- Om nya x är bättre än bästa, gå dubbelt så långt, $x = \bar{x} + 2\Delta x$.
- Om nya x är inte bättre än näst sämsta, gå hälften så långt, $x = \bar{x} + 0.5\Delta x$.
- Om nya x är inte bättre än sämsta, gå hälften så långt bakåt, $x = \bar{x} - 0.5\Delta x$.
- Om inget ger en bättre punkt, flytta alla punkter närmare den bästa.

Relaxationsmetoder

Relaxera bivillkor, ger lättare problem.

Försök återskapa relaxerade bivillkor m.h.a. linjära straffkostnader och heuristiker. (Teori: Lagrangedualitet.)

Exempel: Lagrangeheuristik för TSP:

Relaxation: 1-träd (relaxerat nodvalens ≤ 2).

Nodstraff: Addera θ till kostnaden för alla bågar som ansluter till en nod med för hög valens.

Försök få en tillåten lösning genom att flytta bågar från noder med för hög valens till noder med för låg.

Försök fixera variabler m.h.a. övre och undre gränser.

Använd närmaste granne, två-byte eller annan heuristik då och då.

Starta gärna heuristiken med delar av subproblemlösningen.