Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2011-05-31

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_3 inkommande och x_5 utgående. Därefter fås optimum: Optimum är $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3/2$, ($x_4 = 5/2$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$) och $z = 6$. Lösning: Gör 1.5 kg av produkt 3. Både maskin 1 och 3 har kapacitet över.

1b: Läs av skuggpriserna ur optimaltablån: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$. Detta betyder att vi inte tjänar något på att öka kapaciteten hos maskin 1, och att vinsten ökar med 2 om vi ökar kapaciteten hos maskin 2 med 2.

1c: Vi får $\hat{c}_2 = c_2 - y^T a_2 = 4 - 3 = 1 > 0$. Optimum kommer att förändras. I tablån stod $-\hat{c}_2 = 1$. Ändra detta till $-\hat{c}_2 = -1$ och fortsätt med simplexmetoden. Nu blir x_2 inkommande och x_3 utgående. Därefter fås optimum: Optimum är $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 4$, $x_5 = 0$, $x_6 = 4$) och $z = 8$, dvs. gör 2 kg av produkt 2.

1d: Frågan är alltså om x_2 och x_5 kan vara i basen samtidigt. Svaret är nej, eftersom dessa kolumner är linjärt beroende ($a_2 = 3a_5$), så en basmatris B med dessa två kolumner skulle inte gå att invertera.

1e: LP-dualen blir:

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\min & z = & 4y_1 & + & 6y_2 & + & 4y_3 & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & \geq & 2 & (1) \\
 & & & & 3y_2 & & & \geq & 2 & (2) \\
 & & y_1 & + & 4y_2 & + & 2y_3 & \geq & 4 & (3) \\
 & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Dual optimallösning är lika med skuggpriserna: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$.

Komplementaritet: Bara $x_3 > 0$, och duala bivillkor 3 är aktivt. Bara $y_2 > 0$, och primala bivillkor 2 är aktivt.

1f: P0: Första LP-opt: $x_2 = 0$, $x_3 = 3/2$ och $z = 6$. Detta ger $\bar{z} = 6$.
Förgrena över x_3:
P1 ($x_3 \leq 1$): LP-opt: $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$ och $z = 16/3$, vilket ger $\bar{z} = 5$.
(Avrundning ger $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ och $\underline{z} = 4$.)
Förgrena över x_2:
P3 ($x_3 \leq 1, x_2 \leq 0$): LP-opt: $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ och $z = 4$ (heltal), vilket ger $\underline{z} = 4$. Kapa.
P4 ($x_3 \leq 1, x_2 \geq 1$): LP-opt: $x_2 = 1$, $x_3 = 3/4$ och $z = 5$ vilket ger $\bar{z} = 5$.
Förgrena över x_3:

P5 ($x_3 \leq 1, x_2 \geq 1, x_3 \leq 0$): LP-opt: $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ och $z = 4$. Kapa.
P6 ($x_3 \leq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$): Saknar tillåten lösning. Kapa.
P2 ($x_3 \geq 2$): Tillåten lösning saknas. Kapa.
Trädet avsökt. Optimum: $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ och $z = 4$ (eller $x_2 = 2$, $x_3 = 0$), dvs. gör 1 kg av produkt 3 (eller 2 kg av produkt 2).

1g: Jämförelse mellan bivillkor (1) och (3) ger $x_1 + x_3 \leq x_1 + 2x_3 \leq 4$, vilket ger att bivillkor (1) är uppfyllt av alla lösningar som uppfyller (3). Detta medför att bivillkor (1) är redundant.

Detta gör att vi kan fixera $y_1 = 0$, dvs. stryka y_1 ur duala problemet. I den återstående dualen ser man att duala bivillkor (2) gör duala bivillkor (1) redundant. Detta gör att man stryka x_1 ur det primala problemet. Nu ser vi att primala bivillkor (2) gör primala bivillkor (3) redundant, så vi kan stryka y_3 ur dualen. I dualen blir nu bivillkor (2) redundant, så x_2 kan strykas. I dualen återstår nu bara y_2 och bivillkoret $4y_2 \geq 4$, vilket trivialt ger $y_2 = 1$. I primalen återstår bara x_3 och bivillkoret $4x_3 \leq 6$, vilket trivialt ger $x_3 = 3/2$. Problemet är löst.

I uppgift c ökas högerledet i duala bivillkor (2) från 2 till 4, vilket skär bort tidigare duala optimum.

Uppgift 2

2a: Kostnadsmatrisen blir $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Lös med ungerska metoden. Vi får $\alpha = (2,3,4,5)$ och $\beta = (0,1,2,3)$ efter första fasen. Därefter är *alla* reducerade kostnader noll, så vi kan ta vilken tillåten lösning som helst, t.ex. $x_{11} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{44} = 1$. Problemet är alltså lätt.

2b: Kostnadsmatrisen blir $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$. Lös med ungerska metoden. Vi får först $\alpha = (1,2,3,4)$ vilket ger $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$. Sedan får vi $\beta = (0,1,2,3)$, vilket ger $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Nu kan alla nollor strykas med två streck, rad 1 och kolumn 1. Det ger $\alpha = (1,3,4,5)$ och $\beta = (-1,1,2,3)$, vilket ger $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

Nu kan alla nollor strykas med tre streck, t.ex. rad 1 och 2 samt kolumn 1. Det ger

$\alpha = (1,3,5,6)$ och $\beta = (-2,1,2,3)$, vilket ger $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Nu kan alla nollor strykas med tre streck, rad 1 samt kolumn 1 och 2. Det ger $\alpha = (1,4,6,7)$ och $\beta = (-3,0,2,3)$, vilket ger $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Nu fås lösningen $x_{14} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{41} = 1$. Mer arbete än så här kan man knappast få, så detta problem är svårt.

Uppgift 3

3a: Första flödesökande väg: 1 - 2 - 3 - 5 - 4 - 6, kapacitet 8. Skicka. (Båge (3,5) blir full.)

Andra flödesökande väg: 1 - 3 - 2 - 4 - 5 - 6, kapacitet 5. Skicka. (Båge (1,3) blir full. Bågarna (2,3) och (5,4) används baklänges.)

Tredje flödesökande väg: 1 - 2 - 4 - 6, kapacitet 1. Skicka. (Båge (2,4) blir full.)

Detta är maxflöde, 14. Minsnitt går över bågarna (2,4) och (3,5).

3b: Basbågar: (1,2), (2,4), (4,6), (3,5), (5,6). (Inte (1,3) för flödet ligger på övre gränsen.)

Vi får nodpriser $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_4 = 11$, $y_6 = 16$, $y_5 = 10$, $y_3 = 3$, samt reducerade kostnader $\hat{c}_{13} = 1 > 0$ (ej optimalt, ty $x_{13} = u_{13}$), $\hat{c}_{23} = 4$ (optimalt, ty $x_{23} = 0$), $\hat{c}_{54} = 1$ (optimalt, ty $x_{54} = 0$).

Detta ger inkommande variabel x_{13} (att minskas). Cykeln blir (1,3) bakåt, (1,2) framåt, (2,4) framåt, (4,6) framåt, (5,6) bakåt och (3,5) bakåt. Utgående variabel blir x_{24} och den tillåtna flödesändringen är 1.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 4$, $y_5 = 11$, $y_6 = 17$, $y_4 = 12$, samt reducerade kostnader $\hat{c}_{23} = 3$ (optimalt, ty $x_{23} = 0$), $\hat{c}_{24} = -1$ (optimalt, ty $x_{24} = u_{24}$), $\hat{c}_{54} = 1$ (optimalt, ty $x_{54} = 0$). Detta är optimum.

Optimalt flöde är alltså 6 enheter vägen 1 - 2 - 4 - 6 och 4 enheter vägen 1 - 3 - 5 - 6.

3c: Finn billigaste väg från nod 1 med Dijkstras metod. Detta ger nodmärkningar på alla noder. Nysta upp från nod 6, och även från nod 5.

Svar: Väg till nod 6: 1 - 2 - 4 - 6, kostnad 16. Väg till nod 5: 1 - 3 - 5, kostnad 11.

3d: Svar: Väg till nod 6: 1 - 2 - 3 - 5 - 4 - 6, kostnad 13.

3e: Billigaste 1-träd: (1,3), (2,3), (2,4), (4,5), (4,6), kostnad 24.

Närmaste granne ger: (1,3), (2,3), (2,4), (4,5), (5,6), (6,1), kostnad 120.

Kostnaden för optimal handelsresandetur ligger mellan 24 och 120.

Uppgift 4

4a: Det modifierade bivillkoret blir $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$. LP-optimum blir $x_1 = 1$ och $x_3 = 1$ med $z = 13$. Eftersom LP-lösningen är heltal, behövs inga förgreningar.

Kontrollerat i det ursprungliga bivillkoret visar sig denna lösning vara tillåten.

4b: Från uppgift a har vi $\underline{z} = 13$.

Sortering av kvoterna c_j/a_j ger ordningen x_3 (bäst), x_4, x_1 och x_2 (sämst). LP-optimum blir då $x_1 = 1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, med $z = 15$. Vi har nu $\bar{z} = 15$.

Avrundning av LP-optimum ger $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, med $z = 12$. Detta förbättrar inte undre gränsen, så vi har $13 \leq z^* \leq 15$.

En minimal övertäckning ger villkoret $x_1 + x_3 + x_4 \leq 2$, vilket skär bort LP-optimum.