Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2012-01-14

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_1 inkommande och x_4 utgående. Sedan blir x_3 inkommande och x_6 utgående. Därefter fås optimum: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1.5$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 1.5$, $x_6 = 0$) och $z = 13$. Lösning: Stoppa i 2.5 tomtar och 1.5 julgran i en påse, vilket ger vinsten 13 kr per påse. Alla lysdioder går åt och påsen blir full, men det blir ljudchip över.

1b: Läs av skuggpriserna ur optimaltablån: $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$. Att öka påsens storlek verkar vara bäst, att skaffa fler ljudchips sämst.

1c: LP-dualen blir:

$$\begin{array}{lcrcrcrcl} \min & v = & 5y_1 & + & 3y_2 & + & 4y_3 & & \\ \text{då} & & 2y_1 & & & + & y_3 & \geq & 4 \\ & & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq & 1 \\ & & & & y_2 & + & y_3 & \geq & 2 \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Dual optimallösning är lika med skuggpriserna: $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$.

Komplementaritet: $x_1 > 0$, och duala bivillkor 1 är aktivt. $x_3 > 0$, och duala bivillkor 3 är aktivt. $y_1 > 0$, och primala bivillkor 1 är aktivt. $y_3 > 0$, och primala bivillkor 3 är aktivt.

1d: Reducerad kostnad: $\hat{c}_7 = c_7 + a_7^T y = 1 - 2 = -1 < 0$, så nej, denna variabel ger ingen förbättring, och bör förbli noll.

1e: P0: Första LP-opt: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1.5$ och $z = 13$, Detta ger $\bar{z} = 13$.
Förgrena över x_1:
P2 ($x_1 \geq 3$): Saknar tillåten lösning.
P1 ($x_1 \leq 2$): Sätt $x_1 = 2$. Grafisk lösning av problemet i x_2 och x_3 ger lösningen $x_2 = 0$ och $x_3 = 2$, med $z = 12$. Detta är heltal, så $\underline{z} = 12$. Kapa.
Alla grenar är avsökta, så optimum blir $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 2$, med $z = 12$. Detta krav kostar alltså Tomtapå 1 kr per timme.

Uppgift 2

2a: Handelsresandeproblem, *NP*-svårt. Det blir inte lättare om start- och slutnod är valfria.

2b: Bågarna som ansluter till noderna 4, 5, 6 och 7 måste vara med (för dessa noder har valens två). Detta gör att noderna 1, 2 och 3 redan har valens två, så resterande bågar får ej vara med. Nu är lösningen helt fixerad, och kostar 45.

2c: Ett billigaste uppspännande träd fås med Kruskals (eller Prims) metod. Trädet blir (1,2), (1,7), (2,3), (2,4), (2,5) och (6,7), med kostnad 29. Optimala målfunktionsvärdet ligger alltså mellan 29 och 45.

2d: Billigaste 1-träd blir (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (2,5), (3,6) och (6,7), med kostnad 36. Optimala målfunktionsvärdet ligger alltså mellan 36 och 45.

2e: Se kurslitteraturen. Förgrening görs t.ex. över nodvalens, t.ex. vid nod 2, som har för hög valens i lösningen. I första grenen förbjuder man t.ex. båge (1,2), i andra förbjuder man båger (2,3) och tvingar med båge (1,2), och i tredje grenen förbjuder man båge (2,4) och tvingar med bågarna (1,2) och (2,3) (och förbjuder båge (2,5).

2f: Nu blir det kinesiska brevbärarproblemet. Innehåller grafen en Eulercykel? Ja, ty alla noder har jämn valens. Optimallösningen blir alltså (valfri) Eulercykel i grafen, och man behöver inte gå mer än en gång i någon båge. Därför är problemet lätt.

Uppgift 3

3a: Använd Dijkstras metod, med nod 1 som startnod. Detta ger nodmärkningar för alla noder, och man kan nysta upp baklänges från valfri nod.

3b: Sätt kapacitet 1 på all bågar och finna maxflöde från nod 1 till nod 2. Första flödesökande väg: 1 - 2, kapacitet 1. Skicka, ändra tillåten riktning på båge (1,2). Andra flödesökande väg: 1 - 7 - 6 - 3 - 2, kapacitet 1. Skicka, ändra tillåtna riktningar. Nu saknas flödesökande väg från nod 1. (Minsnittet går runt nod 1.) Alltså finns två olika vägar.

3c: Detta är ett minkostnadsflödesproblem med stora kapaciteter (t.ex. 100). Alla bågar med positivt flöde blir då basbågar. Dessutom behövs en till nod 3, ta t.ex. båge (2,3). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 7$, $y_4 = 16$, $y_5 = 9$, $y_6 = 12$, $y_7 = 7$. En snabb koll av reducerade kostnader visar att denna lösning är optimal i den givna grafen. För vända oanvända bågar gäller följande (vi kan bortse från (2,1), eftersom (1,2) redan finns, och från (2,3) eftersom den är basbåge):
(1,3): $\hat{c}_{13} = 5 + 0 - 7 = -2 < 0$, en möjlig kandidat.
(1,5): $\hat{c}_{15} = 6 + 0 - 9 = -3 < 0$, en möjlig kandidat.
(2,4): $\hat{c}_{24} = 5 + 4 - 16 = -7 < 0$, en bra kandidat.
(3,2): $\hat{c}_{32} = 3 + 7 - 4 = 6 > 0$, inte en kandidat.
(3,4): $\hat{c}_{34} = 6 + 7 - 16 = -3 < 0$, en möjlig kandidat.
(3,6): $\hat{c}_{36} = 11 + 7 - 12 = 6 > 0$, inte en möjlig kandidat.

Nästan alla ger förbättring, men vi väljer (2,4) eftersom den har mest negativ reducerad kostnad.

(Om man skulle fortsätta lösa problemet, skulle man skicka runt 3 enheter i cykeln 2 - 4 - 5 - 2, och sänka kostnaderna med 21.)

Uppgift 4

4a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om han tar paket j.
Modell:

$$
\begin{array}{llll}
\max & z = & \sum_j (c_j - d_j)x_j & \\
\text{då} & & x_j \leq x_i & \text{för alla } (i,j) \in I \\
& & y_j \in \{0,1\} & \forall j
\end{array}
$$

(Bivillkoren kan även skrivas som $a_{ij}x_j \leq x_i$.)

4b: Bivillkor (uppifrån): $x_3 \leq x_4$, $x_5 \leq x_4$, $x_2 \leq x_3$, $x_6 \leq x_3$, $x_7 \leq x_3$, $x_7 \leq x_5$, $x_9 \leq x_5$, $x_1 \leq x_2$, $x_8 \leq x_2$, $x_8 \leq x_6$, $x_{10} \leq x_9$.

(Man behöver inte ta med t.ex. $x_1 \leq x_3$, eftersom det följer av $x_1 \leq x_2$ och $x_2 \leq x_3$, som finns med.)

En optimistisk uppskattning (för bra) är summan av alla paket med vinst, här 12. En pessimistisk uppskattning (tillåten lösning) är summan av alla paket, här 12-11=1. Eftersom den pessimistiska uppskattningen ger vinst, är det inte optimalt att inta ta något. (Om den optimistiska uppskattningen inte gav vinst, ska man inte ta något, men det lär inte hända.) Om den optimistiska uppskattningen gav vinst, men den pessimistiska inte gav vinst, vet man inte om det är optimalt att ta något.

(Man skulle kunna skaffa sig bättre uppskattningar, genom att summera allt som måste flyttas för att nå ett visst paket, men då måste man göra det för alla paket och för alla kombinationer av paket, vilket blir jobbigt.)

4c: En enkel heuristik: Ta det bästa möjliga paketet. Ta bara paket som ger förlust om det finns något paket med vinst under. Upprepa.

När man är färdig, kan man backa tillbaka till den bästa lösningen.

Exemplet: Ta först paket 4, vinst -3. Ta sedan paket 3, total vinst -5. Ta sedan paket 6, total vinst -5. Ta sedan paket 5, total vinst -7. Ta sedan paket 7, total vinst -1. Ta sedan paket 9, total vinst 0. Ta sedan paket 10, total vinst 4. Ta sedan paket 2, total vinst 1. Ta sedan paket 8, total vinst 4.

Som synes måste man acceptera förluster i början, så man kan inte sluta när man inte når något paket med vinst.

I detta fall kan man antingen ta allt utom paket 1, eller sluta när man tagit paket 10.