Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2012-05-29

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: P0: Första LP-opt: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0.5$ och $z = 55$. Detta ger $\bar{z} = 55$.
Förgrena över x_1: Skapa P1 = P0 + ($x_1 \leq 2$), och P2 = P0 + ($x_1 \geq 3$).
Lös P1 ($x_1 \leq 2$): Grafisk lösning ger $x_1 = 2$ och $x_2 = 1$ med $z = 50$. Detta är heltal, så $\underline{z} = 50$. Kapa.
Lös P2 ($x_1 \geq 3$): Saknar tillåten lösning. Kapa.
Alla grenar är avsökta, så optimum blir $x_1 = 2$ och $x_2 = 1$. Svar: Gör två bokstöd och en stekspade per timme, vilket ger 50 kr i vinst.

1b: $2x_1 \leq 5$ betyder $x_1 \leq 2.5$ vilket betyder $x_1 \leq 2$ om x_1 måste vara heltal.
$3x_2 \leq 7$ betyder $x_2 \leq 2.67$ vilket betyder $x_2 \leq 2$ om x_2 måste vara heltal.
Grafiskt kan man se att om man tillför dessa två bivillkor fås det konvexa höljet av de tillåtna heltalspunkterna, och alla extrempunkter är heltaliga. Om man använder Land-Doig-Dakins metod, så kommer den första lösningen att vara heltalig, så man behöver inte göra någon förgrening alls.

1c: Se 1b.

1d: $x_1 \leq My_1$, $x_2 \leq My_2$, $y_1 + y_2 \leq 1$, $y_1 \in \{0, 1\}$, $y_2 \in \{0, 1\}$.
Här räcker det med $M = 3$. Man kan även eliminera $y_2 = 1 - y_1$ om man vill.

Uppgift 2

2a: Starta med slackvariablerna i basen. Först blir x_1 inkommande och x_3 utgående. Därefter blir x_2 inkommande och x_4 utgående. Sedan fås optimum: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 5.5$ och $z = 55$. Lösning: Gör 2.5 bokstöd och 0.5 stekspade per timme, vilket ger 55 kr i vinst. Det första och andra bivillkoret är aktiva, dvs. plastfötter och stanstid begränsar lösningen.

2b: Läs av skuggpriserna ur optimaltablån: $y_1 = 5$, $y_2 = 0.5$, $y_3 = 0$. Detta anger möjlig vinst av att öka motsvarande högerled, dvs. en plastfot till är värd 5 kr, mer stanstid är värd 0.5 kr per minut och fler skruvar ger inget.

2c: (Standard.)

2d: Ny variabel, x_6. $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 15 - 14 = 1 > 0$, så ja, det verkar löna sig.

2e: Primala optimallösningen ändras ej. I den duala optimallösningen blir $y_2 = 10$, dvs. 20 gånger större eftersom bivillkorskoefficienterna dividerades med 20.

Uppgift 4

4a: Finn billigaste väg från nod 1 med Dijkstras metod. Detta ger nodmärkningar på alla noder. Nysta upp från nod 6 och nod 3. Väg: 1 - 2 - 3, kostnad 21. Väg: 1 - 4 - 6, kostnad 21.

4b: Duallösningen är nodpriserna från uppgift a: $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 21$, $y_4 = 9$, $y_5 = 11$, $y_6 = 21$.

4c: $\hat{c}_{26} = c_{26} + y_2 - y_6 = c_{26} + 10 - 21 = c_{26} - 11 < 0$ om $c_{26} < 11$.

4d: Om A är C finns det en gemensam duallösning, om A inte är C finns troligen ingen gemensam. (Detta förutsätter att inga negativa cykler finns, för då finns ingen tillåten dual lösning alls.)

Uppgift 5

5a: Basbågar: (1,2), (1,5), (2,3), (4,5), (5,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 21$, $y_4 = 4$, $y_5 = 11$, $y_6 = 19$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = 5$ (minska), $\hat{c}_{36} = 12$ (minska), $\hat{c}_{46} = 2$ (optimalt), $\hat{c}_{53} = 2$ (optimalt).

Jag väljer x_{36} som inkommande variabel (att minska). Cykeln blir 6-3-2-1-5-6, och utgående variable blir x_{56}. Ändringen blir 1 enhet. Beräkning av nya nodpriser och nya reducerade kostnader visar att lösningen inte är optimal.

5b: Maximal flödesökande väg blir 1-5-4-6. Skicka 2 enheter. Sedan blir det maxflöde. Ett icke-minsnitt är t.ex. (2,3), (5,3), (5,6), (4,6).

Uppgift 6

6a: Kruskals eller Prims metod. Kostnad 45.

6b: Kostnad 54.

6c: Närmaste granne ger kostnad 60.

6d: $54 \le z^* \le 60$.

6e: Förgrena över nodvalens, t.ex. nod 5 som har valens 3 (eller 4).
P1: Förbjud (1,5).
P2: Förbjud (4,5), tvinga med (1,5).
P3: Tvinga med (1,5) och (4,5), förbjud alla andra till nod 5.

Uppgift 7

7a: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1, 3, 4 och 6 har udda valens. Billigaste komplettering av grafen är (1,4) och (3,6). Finn en Eulercykel i denna graf där alla noder nu har jämn valens. Kostnad 107.

7b: Alt 1: Sätt alla noder till mellannoder och sätt undre gräns ett på alla bågar och lös minkostnadsflödesproblemet med simplexmetoden för nätverk.
Alt 2: Sätt nodernas nettosänkstyrka lika med skillnaden mellan utvalens och invalens och lös minkostnadsflödesproblemet. Addera ett till flödet i alla bågar.