Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2013-01-07

Lösningar

Uppgift 1

Ytterligare variabeldefinition: y_i: antal snöslungor i lager efter månad i.

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i & \\
\text{då} & y_{i-1} + x_i - s_i = y_i & i = 1, \dots n \\
& 0 \le y_i \le L & j = 1, \dots n \\
& 0 \le x_i \le K & j = 1, \dots n \\
& y_0 = L_0 & \\
& x_i, y_i \text{ heltal} & i = 1, \dots n
\end{array}
$$

Uppgift 2

2a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om maskin j tas med, 0 om inte.

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max & z = & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \le 8 \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \in \{0,1\}
\end{array}
$$

2b: Kvoter för LP-lösning (c_j/a_j): $x_1 : 3/3 = 1$, $x_2 : 3/5 = 0.6$, $x_3 : 3/4 = 0.75$, $x_4 : 4/3 = 1.33$, vilket ger x_4 bäst, sedan x_1, x_3 och x_2.

Första LP-lösning (P0): $x_4 = 1$, $\hat{b} = 8 - 3 = 5$, $x_1 = 1$, $\hat{b} = 5 - 3 = 2$, $x_3 = 2/4 = 0.5$, $\hat{b} = 0$, $x_2 = 0$, $z = 8.5$, vilket ger $\bar{z} = 8$.

Avrundning neråt ger tillåten lösning $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, samt $\underline{z} = 7$.

Förgrena över x_3: P1 = P0 + ($x_3 \le 0$), P2 = P0 + ($x_3 \ge 1$).

P1: $x_4 = 1$, $\hat{b} = 8 - 3 = 5$, $x_1 = 1$, $\hat{b} = 5 - 3 = 2$, $x_3 = 0$, $\hat{b} = 2$, $x_2 = 2/5 = 0.4$, $z = 8.2$, vilket ger $\bar{z} = 8$.

Förgrena över x_2: P3 = P1 + ($x_2 \le 0$), P4 = P1 + ($x_2 \ge 1$).

P3: $x_4 = 1$, $\hat{b} = 8 - 3 = 5$, $x_1 = 1$, $\hat{b} = 5 - 3 = 2$, $x_3 = 0$, $\hat{b} = 2$, $x_2 = 0$, $z = 7$. Kapa, ty bättre än $z = 7$ kan ej fås. (Heltal.)

P4: Fixering: $x_2 = 1$, $\hat{b} = 8 - 5 = 3$. $x_4 = 1$, $\hat{b} = 3 - 3 = 0$, $x_1 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_3 = 0$, $\hat{b} = 2$, $z = 7$. Kapa, ty bättre än $z = 7$ kan ej fås. (Heltal.)

P2: Fixering: $x_3 = 1$, $\hat{b} = 8 - 4 = 4$. $x_4 = 1$, $\hat{b} = 4 - 3 = 1$, $x_1 = 1/3 \approx 0.33$, $\hat{b} = 0$, $x_3 = 0$, $\hat{b} = 0$, $x_2 = 0$, $z = 8$, vilket ger $\bar{z} = 8$.

Förgrena över x_1: P5 = P2 + ($x_1 \le 0$), P6 = P2 + ($x_1 \ge 1$).

P5: Fixering: $x_3 = 1$, $\hat{b} = 8 - 4 = 4$. $x_4 = 1$, $\hat{b} = 4 - 3 = 1$, $x_1 = 0$, $\hat{b} = 1$, $x_2 = 1/5 = 0.2$, $z = 7.6$, vilket ger $\bar{z} = 7$. Kapa, ty bättre än $z = 7$ kan ej fås.

P6: Fixering: $x_3 = 1$, $\hat{b} = 8 - 4 = 4$, fixering: $x_1 = 1$, $\hat{b} = 4 - 1 = 1$. $x_4 = 1/3 \approx 0.33$, $\hat{b} = 0$, $x_2 = 0$, $z = 7.33$, vilket ger $\bar{z} = 7$. Kapa, ty bättre än $z = 7$ kan ej fås.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, med $z = 7$.

Svar i ord: Ta med maskin 1 och 4.

Uppgift 3

3a: Kinesiskt brevbärarproblem. Alla noder har inte jämn valens, så det finns ingen Eulertur (dvs. en tur som inte använder någon redan sandad väg).

Noderna 2 och 7 har udda valens, och billigaste sättet att öka dessa noders valens är bågen (2,7), så den bågen ska köras två gånger. Exempel på tur: 1-2-3-1-8-4-6-5-7-2-7-3-5-4-1.

3b: Handelsresandeproblem. *NP*-svårt.

Innan man sätter igång med en heuristik, kan man notera att nod 8 och 6 har valens två, så bågarna (1,8), (8,4), (4,6) och (6,5) måste vara med i turen. Detta gör att bågarna (1,4) och (4,5) inte får vara med. Det enda som återstår är att hitta en väg från nod 5 till nod 1 som också passerar noderna 2, 3 och 7, t.ex. vägen 5-7-3-2-1. Vi får turen 1-8-4-6-5-7-3-2-1, med kostnad 58.

En optimistisk uppskattning fås lämpligtvis av billigaste 1-träd, vilket har kostnad 54.

Optimum ligger alltså mellan 54 och 58.

3c: Kör Dijkstras metod med start i nod 1. Det ger nodmärkningar för alla noder, dvs. billigaste väg till alla noder. Nodmärkningarna ger billigaste vägträdet: nod 1: (0,-), nod 2: (9,1), nod 3: (8,1), nod 4: (13,8), nod 5: (16,3), nod 6: (22,4), nod 7: (16,2), nod 8: (7,1).

Uppgift 4

4a:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & z = & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Inför slackvariabler x_3 och x_4. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{b}$
z	1	-2	-1	0	0	0
x_3	0	1	1	1	0	4
x_4	0	3	1	0	1	7

Först blir x_1 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{b}$
z	1	0	-1/3	0	2/3	14/3
x_3	0	0	2/3	1	-1/3	5/3
x_1	0	1	1/3	0	1/3	7/3

Sedan blir x_2 inkommande och x_3 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/2	1/2	11/2
x_2	0	0	1	3/2	-1/2	5/2
x_1	0	1	0	-1/2	1/2	3/2

Därefter fås optimum. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2.5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, och $z = 5.5$. Svar: Blanda 1.5 enheter sand av sort 1 med 2.5 enheter av sort 2. Båda bivillkoren är aktiva.

4b: Skuggpriserna är $y_1 = 0.5$ och $y_2 = 0.5$. Om första högerledet ökas med 0.2 och andra minskas med 0.1 fås målfunktionsändringen $0.5 * 0.2 - 0.5 * 0.1 = 0.05 > 0$, så lösningen blir bättre.

4c: LP-dual:

$$\begin{array}{llrcrcl} \min & v = & 4y_1 & + & 7y_2 & & \\ \text{då} & & y_1 & + & 3y_2 & \geq & 2 \\ & & y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\ & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Läs av duallösningen ur optimaltablån: $y_1 = 0.5$, $y_2 = 0.5$.

4d: Ändring av c_2 ändrar högerledet för bivillkor 2 i dualen. Om bara ett bivillkor ska vara aktivt i optimum, ska en av dualvariablerna vara noll i optimum. Detta uppnås om man ökar c_2 till 2 (eller mer). Lösningen blir då $y_1 = 2$ (eller $y_1 = c_2$) och $y_2 = 0$, så bara första primala bivillkoret (volymen) blir aktivt.

Uppgift 5

5a: Basbågar till den givna lösningen: (1,2), (1,3), (3,5), (5,6) samt t.ex. (3,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 6$, $y_4 = 10$, $y_5 = 12$, $y_6 = 19$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{24} = -1$ (vill öka x_{24}), $\hat{c}_{26} = -5$ (optimalt ty x_{26} är maximal), $\hat{c}_{46} = -4$ (optimalt ty x_{46} är maximal). Lösningen är inte billigast, och x_{24} blir inkommande variabel. Cykeln blir 2 - 4 - 3 - 1 - 2, ändringen blir två enheter, och utgående variabel blir x_{13}. Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 5$, $y_4 = 9$, $y_5 = 11$, $y_6 = 18$, och reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = 1$ (optimalt), $\hat{c}_{26} = -4$ (optimalt), $\hat{c}_{46} = -4$ (optimalt), så detta är optimum.

5b: $\hat{c}_{36} = 10 + y_3 - y_6 = 10 + 5 - 18 = -3$. Vi tjänar alltså 3 per skickad enhet. Dock kan endast 2 enheter ruttas om denna väg (pga. båge (3,5)), så kostnaden sänks bara med 6. Låt parken vara.

5c:
Första flödesökande väg blir 1 - 2 - 4 - 6 (använd Dijkstras metod). Skicka 8 enheter.
Andra flödesökande väg blir 1 - 3 - 5 - 6 (använd Dijkstras metod). Skicka 7 enheter.
Tredje flödesökande väg blir 1 - 3 - 4 - 2 - 6 (använd Dijkstras metod). Skicka en enhet.
Nu är det maxflöde. Minsnitt t.ex. kring nod 1.

Uppgift 6

6a: Efter första steget är $\alpha = (6, 5, 6, 4)$ och $\beta = (0, 0, 2, 1)$, samt

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En tillåten (och optimal) lösning fås för $x_{12} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{32} = 1$ och $x_{41} = 1$, dvs. förare 1 kör traktor 2, förare 2 kör traktor 4, förare 3 kör traktor 3, förare 4 kör traktor 1. Totaltid: 24.

6b: $\alpha = (6, 5, 6, 4)$, $\beta = (0, 0, 2, 1)$.

6c: Den enda skillnaden är att α_2 minskar med 2 enheter. $\hat{C}$ blir oförändrad, och därmed också den primala lösningen.