Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2013-08-30

## Lösningar

*(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)*

### Uppgift 1

**1a:** (Standard.)

**1b:** Gör 200 portioner Köttbullar, inget mer. Vinst 600 kr. Bivillkoret om nötkött är aktivt, de andra inte. Lösningen är inte degenererad och inte optimal.

**1c:** Först blir $x_3$ inkommande och $x_6$ utgående, sedan blir $x_4$ inkommande och $x_2$ utgående. Därefter fås optimum. Optimallösning: Gör 150 portioner Kålpudding, och 200 portioner vanlig Lasange. Vinst 900 kr. Bivillkoren om nötkött och fläskkött är aktiva. Optimallösningen är unik.

**1d:** Skuggpriserna (duallösningen) är $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, så första bivillkoret ger störts förtjänst. Välj alltså nötkött.

**1e:** Problemet har tre bivillkor, dvs. tre basvariabler, så högst tre variabler får positiva värden i en baslösning. Simplexmetoden ger optimum i en baslösning.

**1f:** (LP-dual: Standard.) Duallösning: $y_1 = 3, y_2 = 0, y_3 = 0$. Dualt målfunktionsvärde: 6. Den duala lösningen är inte tillåten, ty det tredje duala bivillkoret är inte uppfyllt. Det kan även ses på att $\hat{c}_3$ har fel tecken (för optimalitet).

### Uppgift 2

**2a:** Billigaste uppspännande träd. Lös med Kruskals eller Prims metod. Kostnad: 29.

**2b:** Ja, en handelsresandetur ger alltid två vägar mellan varje par av noder. En handelsresandetur har kostnad (t.ex.) 43. Billigaste 1-träd kostar 36. Optimalvärdet ligger alltså mellan 36 och 43.

**2c:** Kinesiska brevbärarproblemet. Antal noder med udda valens är 8, så minst 4 bågar måste läggas till. Man kan se en matchning med kostnad 19 (ej säkert optimal), och de fyra billiagste bågarna kostar 12 (men är ej en matchning) så totalkostnaden ligger mellan 77 och 84.

### Uppgift 3

**3a:** Använd Dijkstras metod. Billigaste väg: 1-4-5-6-9, med kostnad 16. Duallösning (nodpriser): $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 14$, $y_4 = 5$, $y_5 = 9$, $y_6 = 13$, $y_7 = 7$, $y_8 = 11$, $y_9 = 16$.

**3b:** Använd Fords metod. Billigaste väg: 1-7-8-5-6-9, med kostnad 15. Duallösning (nodpriser): $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 14$, $y_4 = 5$, $y_5 = 8$, $y_6 = 12$, $y_7 = 7$, $y_8 = 11$, $y_9 = 15$.

## Uppgift 4

**4a:** (Detaljer utelämnas.) $x_{89}$ blir (självklart) inkommande. Cykeln blir 8-9-6-5-8. Ändringen blir 2 enheter och $x_{85}$ blir utgående. Sedan blir $x_{12}$ blir inkommande (för minskning). Cykeln blir 2-1-7-8-9-6-5-2. Ändringen blir en enhet och $x_{69}$ blir utgående. Därefter har vi optimum.

**4b:** Finn flödesökande väg med Dijkstras metod: 1-7-8-5-6-9 med kapacitet 10. Skicka och ändra tillåtna riktningar. Nästa flödesökande väg blir 1-2-3-9, kapacitet 6. Skicka och ändra tillåtna riktningar. Därefter har vi maxflöde. Minsnittet går över (1,2) och (5,6) framåt, samt (2,5) och (9,8) bakåt.

## Uppgift 5

**5a:** Första LP-lösning (P0): $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2$ och $z = 9$, vilket ger $\bar{z} = 9$.
(Avrundning neråt ger tillåten lösning $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, samt $\underline{z} = 7$.)

Förgrena över $x_3$: P1 = P0 + ($x_3 \leq 1$), P2 = P0 + ($x_3 \geq 2$).

P2: ($x_3 \geq 2$): $x_3 = 2$, $x_4 = 1$, och $z = 7$. Inte bättre. (Heltal, vilket ger $\underline{z} = 7$.) Kapa.

P1: ($x_3 \leq 1$): $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, och $z = 8$. Heltal, vilket ger $\underline{z} = 8$.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, med $z = 8$.
Svar i ord: Gör 100 portioner Kålpudding och 200 portioner vanlig Lasagne.

**5b:** Rita konvexa höljet av punkterna (0,0), (2,0), (2,1), (1,2) och (0,2). Bivillkor: $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_3 \leq 2$, $x_4 \leq 2$, $x_3 + x_4 \leq 3$.

## Uppgift 6

**6a:** Generellt gäller $\hat{c}_{ij} = c_{ij} - \alpha_i - \beta_j$ samt $\hat{c}_{ij} = 0$ om $x_{ij} = 1$ och $\hat{c}_{ij} \geq 0$ för alla $i, j$ i optimum.

Speciellt: $\hat{c}_{11} = c_{11} - \alpha_1 - \beta_1 = c_{11} - 3 - 2 = c_{11} - 5 \geq 0$, vilket ger $c_{11} \geq 5$.
$\hat{c}_{12} = c_{12} - \alpha_1 - \beta_2 = c_{12} - 3 = 0$ (ty $x_{12} = 1$), vilket ger $c_{12} = 3$.
$\hat{c}_{31} = c_{31} - \alpha_3 - \beta_1 = c_{31} - 3 - 2 = c_{31} - 5 = 0$ (ty $x_{31} = 1$), vilket ger $c_{31} = 5$.
$\hat{c}_{41} = c_{41} - \alpha_4 - \beta_1 = c_{11} - 5 - 2 = c_{41} - 7 \geq 0$, vilket ger $c_{41} \geq 7$.

**6b:** Ett (tråkigt) exempel är $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, för det ger $\hat{c}_{ij} = 0$ för alla $i, j$.
Varken primal eller dual optimallösning är då unik. (Lösningsgång: standard.)

Andra exempel fås genom att höja valfria kostnader, utom $c_{12}$, $c_{23}$, $c_{31}$ och $c_{44}$. Dual optimallösning är aldrig unik.