Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2014-01-17

Lösningar

Uppgift 1

1a:
Inför slackvariabler x_4, x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-6	-8	-4	0	0	0	0
x_4	0	1	0	5	1	0	0	8
x_5	0	0	5	1	0	1	0	7
x_6	0	1	1	1	0	0	1	5

Först blir x_2 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-5	0	-12/5	0	8/5	0	$56/5 = 11.2$
x_4	0	1	0	5	1	0	0	8
x_2	0	0	1	1/5	0	1/5	0	$7/5 = 1.4$
x_6	0	1	0	4/5	0	-1/5	1	$18/5 = 3.6$

Sedan blir x_1 inkommande och x_6 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	8/5	0	3/5	5	$146/5 = 29.2$
x_4	0	0	0	21/5	1	1/5	-1	$22/5 = 4.4$
x_2	0	0	1	1/5	0	1/5	0	$7/5 = 1.4$
x_1	0	1	0	4/5	0	-1/5	1	$18/5 = 3.6$

Därefter fås optimum. $x_1 = 3.6$, $x_2 = 1.4$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 4.4$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$,) och $z = 29.2$. Svar: Gör 360 röda och 140 blå lysdioder, vilket ger vinsten 2920 kr.

1b: Skuggpriserna är $y_1 = 0$, $y_2 = 0.6$ och $y_3 = 5$. Eftersom y_3 är störst, ska man välja diamant, vilket ger en vinstökning med 0.5 (eftersom bivillkoren är skrivna i 10 kg ger 1 kg ökning en ökning av högerledet med 0.1).

1c: Reducerad kostnad för den nya variabeln, x_7, blir $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y$, där $a_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, och y är den optimala duallösningen, som läses ut ur optimaltablån: $y_1 = 0$, $y_2 = 0.6$ och $y_3 = 5$. Vi får $\hat{c}_7 = c_7 - 0.6 - 5 = c_7 - 5.6$, så x_7 blir inkommande om $c_7 - 5.6 > 0$, dvs. $c_7 > 5.6$. Svar: Mer än 5.6 kr per lysdiod.

Uppgift 2

2a: Den givna startlösningen ger följande basbågar: (1,2), (1,4), (3,5), (3,6), (4,6), (5,7) samt (7,8), (7,9) och (7,10). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 19$, $y_3 = 22$, $y_4 = 21$, $y_5 = 43$, $y_6 = 41$, $y_7 = 57$, $y_8 = 72$, $y_9 = 77$, $y_{10} = 60$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -5 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{25} = 1 > 0$ (inte optimalt, minska), $\hat{c}_{26} = 2 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{67} = -1 < 0$ (optimalt).

Detta ger x_{25} som inkommande variabel (att minska). Cykeln blir 5-2-1-4-6-3-5, ändringen blir 9 enheter, och utgående variabel blir t.ex. x_{36}.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 19$, $y_3 = 23$, $y_4 = 21$, $y_5 = 44$, $y_6 = 41$, $y_7 = 58$, $y_8 = 73$, $y_9 = 78$, $y_{10} = 61$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -6 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{26} = 2 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{36} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{67} = -2 < 0$ (optimalt). Lösningen är optimal.

2b: Reducerad kostnad: $\hat{c}_{6,10} = 19 + 41 - 61 = -1 < 0$. Ja, kostnaden kommer att minska. (Man kan notera att $c_{67} + c_{7,10} = 18$, vilket gör att man skulle tro att det inte lönar sig, men basträdet går inte den vägen.)

2c: Använd Dijkstras metod. Billigaste väg: 1-3-6-7-9, kostnad: 71.

2d: Maximal flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod): 1-4-6-3-5-7, kapacitet: 9. Skicka 9 enheter. Därefter fås minsnitt mellan noderna 1, 2, 4 och 6, som kan nås, och 3, 5 och 7, som inte kan nås.

2e: Nej, vilket bevisas av ovanstående minsnitt. (Det finns även ett minsnitt över (5,7 och (6,7), men det är inte unikt.)

Uppgift 3

3a: Detta är ett hinkpackningsproblem. Bästa plats ger följande lösning:
Bil 1: 10, 9.
Bil 2: 12, 7.
Bil 3: 13, 7.
Bil 4: 6, 10.

Summan av vikterna är 74, så minst $\lceil 74/20 \rceil = 4$ lastbilar krävs. Lösningen använder 4 bilar, så detta är optimalt.

3b: Se sid 33-34 i boken.

Uppgift 4

4a: Det är ett handelsresandeproblem, som är *NP*-svårt. Det finns flera olika heuristiker man kan använda. Man kan t.ex. få en tur, 1-6-5-4-8-2-3-7-9-1, som kostar 34.

4b: En lämplig relaxation är billigaste 1-träd, vilket har kostnad 31. Det optimala målfunktionsvärdet ligger alltså mellan 31 och 34, eller med andra ord, Maltes lösning är högst 3 dyrare än optimum.

4c: Man söker ett billigaste uppspännande träd. Använd Kruskals eller Prims metod. Totalkostnad: 24.

4d: Man söker en Eulertur, men en sådan finns inte, ty alla noder har inte jämn valens.

4e: Det är nu ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 2, 7, 8 och 9 har udda valens, och det billigaste sättet att öka dessa är att duplicera bågarna (2,8) och (7,9). Det är alltså dessa sträckor som ska köras två gånger. Kostnaden blir 66+8=74.

4e: Detta kan hanteras genom att dubblera alla bågar och försöka finna en Eulertur. Eftersom alla noder (självklart) får jämn valens, så finns alltid en Elertur.

Uppgift 5

5a: P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 3.6$, $x_2 = 1.4$, $z = 2920$, vilket ger $\bar{z} = 2920$.

Jag väljer att förgrena över störst fraktionell del och gå ner i $\leq$-grenen först.

Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 3$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 4$).

P1: Grafisk lösning ger $x_1 = 3$, $x_2 = 1.4$, $z = 2620$, vilket ger $\bar{z} = 2620$.

Förgrena över x_2: P3 = P1 + ($x_2 \leq 1$), P4 = P1 + ($x_2 \geq 2$).

P3: Grafisk lösning ger $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $z = 2300$. Tillåten heltalslösning, $\underline{z} = 2300$. Kapa.

P4: Tillåten lösning saknas. Kapa.

P2: Grafisk lösning ger $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $z = 2800$. Tillåten heltalslösning, $\underline{z} = 2800$. Kapa.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, med $z = 2800$.
Svar i ord: Gör fyra hundrapack röda och ett hundrapack blå lysdioder. Detta ger en vinst på 2800 kr.

5b: Bivillkor: $x_1 + x_2 \leq 5$, $x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Uppgift 6

6a: Efter första fasen i ungerska metoden fås $\alpha = (2, 4, 12, 7, 9)$ och $\beta = (6, 3, 0, 14, 8)$ samt optimal x-lösning lika med enhetsmatrisen, dvs. $x_{11} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{55} = 1$, och resten lika med noll. Totalkostnad: 65.

6b: Carlsens metod ger $x_{13} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{55} = 1$, och resten lika med noll. Totalkostnad: 68.

6c: Duala målfunktionsvärdet är helt enkelt summan av α och β, vilket blir 65.