Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2014-04-24

Lösningar

Uppgift 1

1a: P0: Given lösning: $x_1 = 0.5, x_2 = 0.875, x_3 = 0.375$ med $z = 8.875$, vilket ger $\bar{z} = 8$.

Jag väljer att förgrena över störst fraktionell del och gå ner i $\geq$-grenen först.

Förgrena över x_2: P1 = P0 + $(x_2 \leq 0)$, P2 = P0 + $(x_2 \geq 1)$.

P2: Fixering $x_2 = 1$ ger $x_1 = 0.3333, x_3 = 0.333$ med $z = 8.6667$, vilket ger $\bar{z} = 8$.

Förgrena över x_1: P3 = P2 + $(x_1 \leq 0)$, P4 = P2 + $(x_1 \geq 1)$.

P4: Tillåten lösning saknas. Kapa.

P3: Fixering $x_1 = 0$ ger $x_2 = 1$ (tur), $x_3 = 0.5$ med $z = 7.5$, vilket ger $\bar{z} = 7$.

Förgrena över x_3: P5 = P3 + $(x_3 \leq 0)$, P6 = P3 + $(x_3 \geq 1)$.

P6: Tillåten lösning saknas. Kapa.

P5: Lösningen är helt fixerad: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ med $z = 6$. Tillåten heltalslösning, $\underline{z} = 6$. Kapa.

P1: Fixering $x_2 = 0$ ger $x_1 = 1, x_3 = 0.5$ med $z = 6.5$, vilket ger vilket ger $\bar{z} = 6$. Vi har $\bar{z} = \underline{z} = 6$. Kapa.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ med $z = 6$.

1b: Bivillkor: $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 + x_3 \leq 1$, $x_2 + x_3 \leq 1$. Slutsats: Om vi sätter ett $x_j = 1$ måste de andra två vara noll. Välj bästa x_j i målfunktionen (x_2).

(Om man summerar dessa olikheter, dividerar med 2 och avrundar högerledet neråt fås $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$.)

Uppgift 2

2a:
Inför slackvariabler x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-2	-4	-1	0	0	0
x_4	0	1	2	3	1	0	4
x_5	0	1	1	2	0	1	3

Först blir x_2 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	5	2	0	8
x_2	0	1/2	1	3/2	1/2	0	2
x_5	0	1/2	0	1/2	-1/2	1	1

Nu fås optimum. Lösning A: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 1$,) och $z = 8$.

2b:
Välj x_1 som inkommande vilket ger x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	5	2	0	8
x_2	0	0	1	1	1	-1	1
x_1	0	1	0	-1	-1	2	2

Ny optimallösning. Lösning B: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$,) och $z = 8$.

2c: Kolla att lösning B är tillåten och har samma målfunktionsvärde som A.

2d: Grafisk lösning ger $y_1 = 2$ och $y_2 = 0$.

Komplementaritet:
$y_1 > 0$: primala bivillkor 1 aktivt (vilket stämmer för både A och B).
Duala bivillkor 3 ej aktivt: $x_3 = 0$ (vilket stämmer för både A och B).

Lösning A: $x_2 > 0$: duala bivillkor 2 aktivt (vilket stämmer).
$x_5 > 0$: primala bivillkor 2 ej aktivt: $y_2 = 0$ (vilket stämmer).

Lösning B: $x_1 > 0$: duala bivillkor 1 aktivt (vilket stämmer).
$x_2 > 0$: duala bivillkor 2 aktivt (vilket stämmer).

2e: Enklast är nog att kolla $B^{-1}b \geq 0$. De två olika lösningarna ger olika B^{-1}.
Lösning A ger $0 \leq b_1 \leq 6$.
Lösning B ger $3 \leq b_1 \leq 6$.

Lösning B säger att duala bivillkor 1 och 2 ska vara aktiva, medan lösning A säger att duala bivillkor 2 ska vara aktivt tillsammans med $y_2 \geq 0$. Grafiskt ser man att det senare ger bäst information.

(För att göra denna uppgift grafiskt, får man jämföra de aktiva bivillkorens lutningar med målfunktionen i dualen.)

Uppgift 3

3a: I problemet ingår att förbinda de ej sammanhängande delarna av B', vilket kan ses som ett handelsresandeproblem. (Ersätt varje sammanhängande del med en nod.) Kan vi lösa detta problem med en polynomisk metod, kan vi också lösa handelsresandeproblemet polynomiskt. Alltså är problemet NP-svårt.

3b: Börja med att göra lösningen sammanhängande genom att använda Kruskals metod, som startas med bågarna B'. Ta bort delar som ej bidrar till att binda ihop delar av B'. Använd sedan den polynomiska metoden (som i princip är samma som för det kinesiska brevbärarproblemet). Bra lösning: 5-1-6-2-3-5. Kostnad: 27.

3c: Gör första steget i uppgift b, dvs. förbind de osammanhängande delarna med Kruskals metod. Undre gräns: 20.

Uppgift 4

4a: Dijkstras metod ger följande nodmärkningar: $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 2$, $p_2 = 1$, $y_3 = 3$, $p_3 = 1$, $y_4 = 5$, $p_4 = 2$, $y_5 = 4$, $p_5 = 3$, $y_6 = 7$, $p_6 = 4$, och vägen 1-2-4-6 med kostnad 7.

4b: Fords metod ger följande nodmärkningar: $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 2$, $p_2 = 1$, $y_3 = 2$, $p_3 = 4$, $y_4 = 5$, $p_4 = 2$, $y_5 = 3$, $p_5 = 3$, $y_6 = 6$, $p_6 = 5$, och vägen 1-2-4-3-5-6 med kostnad 6.

4c: Stoppa in lösningarna i dualen och kolla tillåtenhet och målfunktionsvärde. III går inte alls. I går nästan, men ger dubbelt så stort målfunktionsvärde (och dubbelt så stora duala slack). II och IV går bra. (Observera dock att $y_s \neq 0$ med IV.)

Uppgift 5

5a: Den givna startbaslösningen ger följande nodpriser: $y_1 = 0$, $y_2 = -3$, $y_3 = -1$, $y_4 = -3$, $y_5 = -2$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{31} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{42} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{51} = 2 > 0$ (optimalt).

5b: Nu blir $\hat{c}_{31} = -1$, så vi vill öka x_{13}. Cykeln blir 3-1-2-3, ändringen blir 4 enheter, och utgående variabel blir t.ex. x_{31}. Därefter fås samma nodpriser och samma reducerade kostnader, vilka nu indikerar optimum.

5c: Maximal flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod): 1-2-3, kapacitet: 4. Skicka 4 enheter. Maximal flödesökande väg: 1-4-2-3, kapacitet: 1. Skicka 1 enhet. Därefter fås minsnitt kring nod 3.

Uppgift 6

6a: $c_{ij} \geq y_j - y_i$.

6b: Om $x_{ij} = l_{ij}$: $c_{ij} \geq y_j - y_i$.
Om $x_{ij} = u_{ij}$: $c_{ij} \leq y_j - y_i$.
Om $l_{ij} < x_{ij} < u_{ij}$: $c_{ij} = y_j - y_i$.

6c: Finns inget enkelt sätt.

6d: $c_j \leq a_j^T y$ (för max-problem).

6e: För båge (i, j): Finn cykeln som båge (i, j) bildar med det uppspännande trädet. Bågkostnaden måste minst vara lika med den dyraste bågen i cykeln.