Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2014-08-29

Lösningar

Uppgift 1

1a:

$$\begin{array}{rl} \max & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{då} & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

1b: Inför slackvariabler x_3 och x_4. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{b}$
z	1	-3	-5	0	0	0
x_3	0	1	3	1	0	3
x_4	0	1	1	0	1	5

Först blir x_2 inkommande och x_3 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{b}$
z	1	-4/3	0	5/3	0	5
x_2	0	1/3	1	1/3	0	1
x_4	0	2/3	0	-1/3	1	4

Sedan blir x_1 inkommande och x_2 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{b}$
z	1	0	4	3	0	9
x_1	0	1	3	1	0	3
x_4	0	0	-2	-1	1	2

Därefter fås optimum. $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, ($x_3 = 0$, $x_4 = 2$) och $z = 9$. Svar: Använd 3 g ved och ingen halm. Detta ger ythårdhet 9, porositet 3 och tyngd 3. (Det sista bivillkoret är alltså inte aktivt.) F.ö. fås blankhet 21 och mjukhet 2.

Metoden går inte kortaste vägen från startpunkten till optimum.

1c: Skuggpriserna är $y_1 = 3$ och $y_2 = 0$. Om tillåten porositet ökar till 4 (dvs. högerledet i första bivillkoret ökar från 3 till 4), ökar målfunktionsvärdet med 3.

1d: De nya högerleden blir $(b_1, 5 - b_1)$, så den optimala baslösningen blir oförändrad om $0 \leq b_1 \leq 5$.

1e: Halm (x_2) har reducerad kostnad $\hat{c}_2 = -4$, så en enhets ökning av c_2 ger $\hat{c}_2 = -3$, vilket inte ändrar lösningen alls. Detta gäller upp till 4 enheters ökning (då vi får $\hat{c}_2 = 0$). För större ökning, fås x_2 som inkommande variabel (och x_1 som utgående).

1f: (Standard.) Duallösningen är $y_1 = 3$ och $y_2 = 0$.

1g: Vi får alltså $c_3 = 2$ och $a_3 = (1,1)^T$, så reducerade kostnaden blir $\hat{c}_3 = 2 - 3 = -1 < 0$. Nej, att använda gamla tidningar förbättrar inte lösningen.

Uppgift 2 Problemet som ska lösas är

$$\begin{array}{rl} \min & 20x_1 + 24x_2 \\ \text{då} & x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 6x_1 + 12x_2 \leq 25 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{ heltal} \end{array}$$

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ och $z = 60$, vilket ger $\underline{z} = 20$.
Den uppmärksamma lösaren ser att denna lösning är heltal, vilket ger $\bar{z} = 20$, och problemet är löst. Svar: Köp tre maskiner av sort 1.

(Det är möjligt att examinator här tänkte sig att av någon anledning maximera kostnaderna. I så fall fås följande mer intressanta lösningsgång.

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 25/6 \approx 4.167$, $x_2 = 0$ och $z = 250/3 \approx 83.33$, vilket ger $\bar{z} = 83$. (Ev: Avrundning neråt ger tillåten lösning $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, samt $\underline{z} = 80$.)

Förgrena över x_1: P1 = P0 + $(x_1 \leq 4)$, P2 = P0 + $(x_1 \geq 5)$.
Jag väljer att gå ner i $\leq$-grenen först.
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 4$, $x_2 = 1/12 \approx 0.0833$, $z = 82$.

Förgrena över x_2: P3 = P1 + $(x_2 \leq 0)$, P4 = P1 + $(x_2 \geq 1)$.
P3: Grafisk lösning ger $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $z = 80$, vilket ger $\underline{z} = 80$. Kapa, ty heltal.

P4: Tillåten lösning saknas. Kapa.
P2: Tillåten lösning saknas. Kapa.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, med $z = 80$.
Svar i ord: Köp 4 maskiner av sort 1.

Men så stod det alltså inte i problemet.)

Uppgift 3

3a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (7,2), (2,3), (1,3), (3,4), (3,5) och (3,6). Detta ger nodpriserna $y_7 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 8$, $y_1 = 1$, $y_4 = 14$, $y_5 = 18$, $y_6 = 18$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{71} = -1 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{12} = 5 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{14} = -4 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{26} = -2 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{54} = 10 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{56} = 8 > 0$ (optimalt). Lösningen är optimal.

3b: Nu får vi $y_6 = 15$, och $\hat{c}_{26} = 1 < 0$ (ej optimalt, minska), $\hat{c}_{56} = 11 > 0$ (optimalt). Detta ger x_{26} som inkommande variabel (att minska). Cykeln blir 6-2-3-6, ändringen blir 2 enheter, och utgående variabel blir x_{26}.

Nu fås samma nodpriser och $\hat{c}_{26} = 1 < 0$ (optimalt), så lösningen är optimal.

3c: Lösningen till uppgift a gav nodpriser $y_4 = 14$ och $y_6 = 18$, så reducerade kostnad för båge (4,6) blir $\hat{c}_{46} = 14 + c_{46} - 18 = c_{46} - 4$, vilket blir mindre än noll om $c_{46} < 4$. Vi kan därför bara acceptera förslaget om kostnaden blir mindre än 4 per bunt.

Uppgift 4

4a: Kör Dijkstras metod *en gång* med 1 som startnod. Alla noder som får ett nodpris är uppnådda. Detta ger följande tider (nodpriser) i minuter: 1: 0, 2: 5, 3: 6, 4: 10, 5: 12 och 6: 18.

4b: Nodpriserna är $y_5 = 12$ och $y_3 = 6$, Om man lägger till båge (3,5) med kostnad 8, fås ingen förbättring, ty $y_3 + c_{35} = 12 + 8 = 20 > 12$. Det hjälper alltså inte.

4c: Första maximala flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir 1-2-5-6, med kapaciteten 5. Skicka 5 enheter, och ändra tillåtna riktningar.

Nästa maximala flödesökande väg (även den funnen med Dijkstras metod) blir 1-3-4-6, med kapaciteten 4. Skicka 4 enheter, och ändra tillåtna riktningar.

När vi nästa gång söker flödesökande väg, når vi bara nod 1 och 3, så minsnittet går mellan dessa noder och de övriga.

4d: En möjlig tur är 1-4-3-6-5-2-1, och har kostnaden 46, vilket är en övre gräns för det optimala målfunktionsvärdet. Billigaste 1-träd ger en bra relaxation, och har kostnaden 36, vilket är en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet.

Uppgift 5

5a: Efter första steget fås $\alpha = (8, 7, 5, 4)$ och $\beta = (0, 0, 1, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 4 samt kolumn 4, vilket gör att vi får $\alpha = (9, 8, 5, 4)$ och $\beta = (0, 0, 1, -1)$. Nu fås lösningen att Anton gör uppgift 1, Beatrice uppgift 4, Carl uppgift 3 och Doris uppgift 2. Total tid blir 26.

5b: Det enda som ändras är att β_1 blir två enheter större. Den optimala primala lösningen ändras ej, men blir 2 enheter dyrare. (Alla tillåtna lösningar blir två enheter sämre.) Detta gäller för valfri ökning.