Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2015-01-16

Lösningar

Uppgift 1

1a:
Inför slackvariabler x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-3	2	3	-2	0	0	0
x_5	0	1	-2	-1	2	1	0	7
x_6	0	2	2	2	-2	0	1	8

Först blir x_1 inkommande och x_6 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	5	6	-5	0	3/2	12
x_5	0	0	-3	-2	3	1	-1/2	3
x_1	0	1	1	1	-1	0	1/2	4

Nu blir x_4 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	8/3	0	5/3	2/3	17
x_4	0	0	-1	-2/3	1	1/3	-1/6	1
x_3	0	1	0	1/3	0	1/3	1/3	5

Därefter fås optimum. $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, ($x_5 = 0$, $x_6 = 0$) och $z = 17$.
Svar: Gör 5 ton av produkt 1 och 1 ton av produkt 4. Båda råvarorna går åt.

1b: Starta från starttablån ovan. Först blir x_3 inkommande och x_6 utgående.

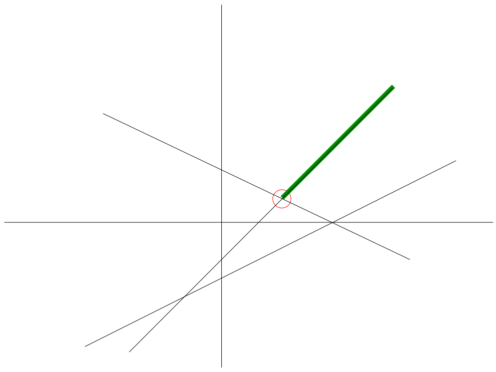
Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-6	-1	0	1	0	-3/2	-12
x_5	0	2	-1	0	1	1	1/2	11
x_3	0	1	1	1	-1	0	1/2	4

Därefter blir x_4 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-8	0	0	0	-1	-2	-23
x_4	0	2	-1	0	1	1	1/2	11
x_3	0	3	0	1	0	1	1	15

Därefter fås optimum. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 15$, $x_4 = 11$, ($x_5 = 0$, $x_6 = 0$) och $z = -23$.
Svar: Gör 15 ton av produkt 3 och 11 ton av produkt 4. Båda råvarorna går åt.

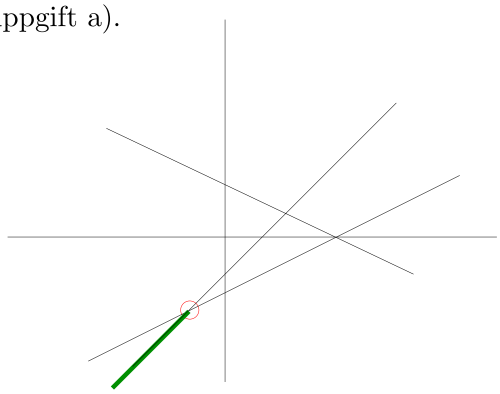
1c: LP-dual:



$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\min & v = & 7y_1 & + & 8y_2 & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 3 & (1) \\
& & -2y_1 & + & 2y_2 & \geq & -2 & (2) \\
& & -y_1 & + & 2y_2 & \geq & -3 & (3) \\
& & 2y_1 & - & 2y_2 & \geq & 2 & (4) \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Notera att (2) och (4) ger ett likhetsvillkor. Optimal duallösning: $y_1 = 5/3$, $y_2 = 2/3$ och $v = 17$ (vilket stämmer med optimaltablån i uppgift a).

1d: LP-dual:



$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & v = & 7y_1 & + & 8y_2 & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \leq & 3 & (1) \\
& & -2y_1 & + & 2y_2 & \leq & -2 & (2) \\
& & -y_1 & + & 2y_2 & \leq & -3 & (3) \\
& & 2y_1 & - & 2y_2 & \leq & 2 & (4) \\
& & y_1, & & y_2 & \leq & 0 &
\end{array}
$$

Notera att (2) och (4) ger ett likhetsvillkor. Optimal duallösning: $y_1 = -1$, $y_2 = -2$ och $v = -23$ (vilket stämmer med optimaltablån i uppgift b).

1e: Skuggpriset från uppgift a är $y_1 = 5/3$, så en enhets ökning av högerledet i bivillkor 1 ger en ökning av optimala målfunktionsvärdet med 5/3 till 18.67. Skuggpriset från uppgift b är $y_1 = -1$, så en enhets ökning av högerledet i bivillkor 1 ger en minskning av optimala målfunktionsvärdet med -1 till -24.

1f: Ny variabel, x_7, får reducerad kostnad $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = 3 - 2y_1 - y_2 = 3 - 10/3 - 2/3 = -1 < 0$ i upgift a. Nej, det ger ingen förbättring vid maximering. För uppgift b: $\hat{c}_7 = 3 + 2 + 2 = 7 > 0$. Nej, det ger ingen förbättring vid minimering.

Uppgift 2

2a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (2,6), (3,6), (4,5) och (5,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 3$, $y_4 = 0$, $y_5 = 3$, $y_6 = 8$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{14} = 6 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{23} = 4 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{35} = 6 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 2 > 0$ (optimalt). Lösningen är alltså optimal.

2b: Vi får nu reducerade kostnad $\hat{c}_{13} = 1 > 0$ (ej optimalt, minska), vilket ger x_{13} som inkommande variabel (att minska). Cykeln blir 3-1-2-6-3, ändringen blir 5 enheter, och utgående variabel blir x_{12}.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 4$, $y_4 = 1$, $y_5 = 4$, $y_6 = 9$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = -1 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{14} = 5 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{23} = 4 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{35} = 6 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 2 > 0$ (optimalt). Nu är lösningen optimal. Förändring i målfunktionsvärde: 5 (reducerad kostnad gånger ändringen).

2c: Lösningen till uppgift a gav nodpriser $y_1 = 0$ och $y_4 = 0$, så reducerade kostnad för båge (1,4) blir $\hat{c}_{14} = c_{14}$. Så länge som $c_{14} \geq 0$ behöver man inte ändra flödet.

2d: Startflödet är 7 enheter från 1 till 6 och 5 enheter från 4 till 6. Man kan öka flödet i båge (1,4) med 5 enheter, så fås ett bra startflöde med 12 enheter från 1 till 6.

Om man gör det, fås följande lösningsgång.

Första flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir t.ex. 1-2-6, med kapaciteten 5. Skicka 5 enheter. Nästa flödesökande väg blir (exempelvis) 1-4-5-6, med kapaciteten 1. Skicka 1 enhet. (Nu är båge (1,4) full.) Efter detta saknas flödesökande väg, så maxflöde med 18 enheter är funnet. Bara nod 1 blir uppnådd, så minsnitt går runt nod 1.

Om man inte gör ändringen i startflödet, fås följande lösningsgång.

Första flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir t.ex. 1-2-6, med kapaciteten 5. Skicka 5 enheter. Nästa flödesökande väg blir (exempelvis) 1-4-5-6, med kapaciteten 1. Skicka 1 enhet. Nästa flödesökande väg blir (exempelvis) 1-4-3-6, med kapaciteten 1. Skicka 1 enhet.

Efter detta saknas flödesökande väg, så maxflöde är funnet. Bara noderna 1, 2, 3, 4 och 5 blir uppnådda, så minsnitt går mellan dem och noderna 2 och 6. (I denna lösning går 14 enheter från nod 1 till nod 6 och 5 enheter från nod 4 till nod 6.)

Uppgift 3

3a: P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ och $z = 8$, vilket ger $\bar{z} = 8$. Heltalig lösning, spara, kapa och notera $\underline{z} = 8$.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, med $z = 8$.

3b: Från uppgift a har vi $\underline{z} = 8$.

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 16/11$, $x_2 = 8/11$ och $z = 96/11 = 8.72$, vilket ger $\bar{z} = 8$.

Detta ger $\underline{z} = \bar{z}$, så grenen kapas. Trädet avsökt. Bästa lösning oförändrad.

Uppgift 4

4a: Närmaste-granne ger lösningen 1-2-4-3-7-6-5-1, med kostnaden 57. Billigaste 1-träd kostar 54, så vi har en övre gräns på 57 och en undre på 54. Lösningen ligger som mest tre enheter från optimum.

4b: Nej, ty flera noder har udda valens.

4c: Ja. Dubblera alla bågar, vilket ger att alla noder får jämna valens.

Uppgift 5

5a:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \quad \hat{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \hat{C}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Efter första steget fås $\alpha = (1,2,3,4)$ och $\beta = (0,1,2,3)$ och $\hat{C}_1$ ovan. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och kolumn 1, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (1,3,4,5)$ och $\beta = (-1,1,2,3)$. Nu kan man stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 2 samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (1,3,5,6)$ och $\beta = (-2,1,2,3)$. Nu kan man stryka alla nollor genom att stryka rad 1 samt kolumn 1 och 2, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (1,4,6,7)$ och $\beta = (-3,0,2,3)$ och $\hat{C}_2$ ovan.

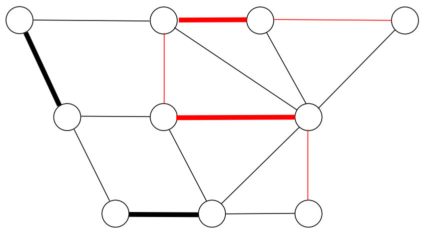
Nu fås lösningen $x_{14} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{41} = 1$. Total kostnad blir 20.

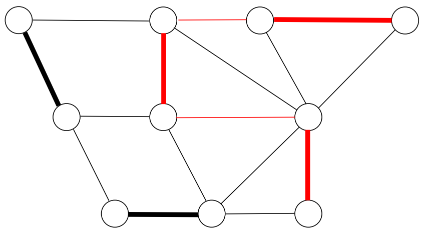
Problemet blir ganska svårt. Man skapar bara en ny nolla vid varje iteration, så det verkar som man får göra i princip n iterationer. (Dock blir "antidiagonalen" alltid optimal, så på det sättet är det lätt.)

5b: Nej. (Man kan stryka på lite olika sätt, men position (1,1) blir dubbelt struken flera gånger.)

Uppgift 6

6a: En utökande väg finnes. Därefter är matchningen maximal, eftersom alla noder är matchade.





6b: Grafen innehåller K3 (en klick med tre noder), så därför krävs minst tre färger. Grafen är plan, så vi vet att fyra färger räcker. En enkel girig heuristik ger en lösning med tre färger, så övre och undre gräns är båda tre.

6c: Grafen innehåller en nod med valensen 6, så därför krävs minst 6 färger. Enligt Vizings sats räcker det med 7 färger. En enkel girig heuristik ger en lösning med 6 färger, så övre och undre gräns är båda 6.

Uppgift 7

Använd Fords metod. Efter ett tag upptäcker man en negativ cykel: 2-4-6-7-5-2, med kostnaden -1. Alltså finns ingen billigaste väg.

De duala bivillkoren för dessa bågar säger $y_4 - y_2 \leq 3$, $y_6 - y_4 \leq -4$, $y_7 - y_6 \leq 2$, $y_5 - y_7 \leq 1$, $y_2 - y_5 \leq -3$. Summering av dessa bivillkor ger $0 \leq -1$, vilket aldrig kan uppfyllas, så någon tillåten dualösning finns ej.