Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2015-04-09

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-4	-3	-1	0	0	0
x_4	0	2	1	1	1	0	5
x_5	0	2	2	1	0	1	7

Först blir x_1 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	-1	1	2	0	10
x_1	0	1	1/2	1/2	1/2	0	5/2
x_5	0	0	1	0	-1	1	2

Nu blir x_2 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	1	1	1	12
x_1	0	1	0	1/2	1	-1/2	5/2
x_2	0	0	1	0	-1	1	2

Därefter fås optimum. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, och $z = 12$. Svar: Gör 1.5 av sort 1 och 2 av sort 2. Både fläktar och minneskort går åt helt.

1b: LP-dual: Standard. Duallösning: $y_1 = 1$, $y_2 = 1$.

1c: Duala punkter: (0, 0), (2, 0), (1, 1). (Läs av i tablåerna ovan.) De två första är inte dualt tillåtna.

1d: Skuggpriset från uppgift a är $y_1 = 1$, så en enhets ökning av högerledet i bivillkor 1 ger en ökning av optimala målfunktionsvärdet med 1 till 13.

1e: Ny variabel, x_6, får reducerad kostnad $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = 2 - 2y_1 - y_2 = 2 - 2 - 1 = -1 < 0$. Nej, det ger ingen förbättring.

Uppgift 2

P0: Grafisk lösning (eller uppgift 1) ger $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$ och $z = 12$, vilket ger $\bar{z} = 12$. Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 1$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 2$).

P2: Grafisk lösning ger $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ och $z = 11$. Heltalig lösning, spara, kapa och notera $\underline{z} = 11$.

P1: Grafisk lösning ger $x_1 = 1$, $x_2 = 2.5$ och $z = 11.5$, vilket ger $\bar{z} = 11$.

Detta ger $\underline{z} = \bar{z}$, så grenen kapas. Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, med $z = 11$. Vinsten blir bara en enhet lägre.

Uppgift 3

3a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,3), (1,4), (2,4), (4,5) och (4,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 15$, $y_4 = 22$, $y_5 = 43$, $y_6 = 35$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 9 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{35} = -15 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 23 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{56} = 24 > 0$ (optimalt). Lösningen är alltså optimal.

3b: Vi får nu reducerade kostnad $\hat{c}_{35} = 5 > 0$ (ej optimalt, minska), vilket ger x_{35} som inkommande variabel (att minska). Cykeln blir 3-1-4-5-3, ändringen blir 4 enheter, och utgående variabel blir x_{14}.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 12$, $y_3 = 15$, $y_4 = 27$, $y_5 = 48$, $y_6 = 40$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 4 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{14} = -5 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 28 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{56} = 24 > 0$ (optimalt). Nu är lösningen optimal. Förändring i målfunktionsvärde är reducerad kostnad gånger ändringen, vilket blir 20, så gamla lösningen är 20 dyrare.

3c: Lösningen till uppgift a gav nodpriser $y_1 = 0$ och $y_2 = 7$, så reducerade kostnad för båge (1,2) blir $\hat{c}_{12} = c_{12} - 7$. Om $c_{12} < 7$ bör båge (1,2) användas.

3d: Första flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir t.ex. 1-4-6, med kapaciteten 7. Skicka 7 enheter. Nästa flödesökande väg blir (exempelvis) 1-3-5-6, med kapaciteten 7. Skicka 7 enheter. Nästa flödesökande väg blir (exempelvis) 1-2-4-6, med kapaciteten 3. Skicka 3 enheter.

Efter detta saknas flödesökande väg, så maxflöde med 17 enheter är funnet. Alla noder utom nod 6 blir uppnådda, så minsnitt går runt nod 6.

Uppgift 4

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Efter första steget fås $\alpha = (1, 2, 2, 1)$ och $\beta = (0, 1, 1, 0)$ och $\hat{C}_1$ ovan. Man kan stryka alla nollor genom att stryka kolumn 1 samt rad 3 och 4, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (2, 3, 2, 1)$ och $\beta = (-1, 1, 1, 0)$ och $\hat{C}_2$ ovan.

Nu fås (t.ex.) lösningen $x_{11} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{43} = 1$. Total kostnad blir 9.

Uppgift 5

5a: Billigaste 1-träd kostar 100, så vi har en undre på 100. När man försöker hitta en tillåten lösning, kommer man att misslyckas, oavsett vilken metod man väljer. Låt oss därför försöka bevisa att en tillåten lösning saknas. Alla noder ska ha valens två, vilket gör att bågarna (1,7), (7,5), (1,2), (2,4), (4,6) och (5,6) måste vara med. Noderna 1, 7, 5, 6, 4 och 2 har nu redan valens två, så inga fler bågar till dem får tas med, vilket eliminerar alla återstående bågar. Därför finns ingen Hamiltoncykel.

5b: Nej, ty noderna 3 och 4 har udda valens. Dubblering av båge (3,4) är billigaste sättet att ge alla noder jämn valens. Rundturen får kostnad $175 + 16 = 191$.

Uppgift 6

6a: Man får matchningen (1,4) och t.ex. (3,5). Matchningen är inte maximal.

6b: En utökande väg finnes, t.ex. 2-1-4-3-5-6. Byt matchning längs den vägen. Nu är alla noder utom en matchade, så matchningen är maximal.

6c: Grafen innehåller K3 (en klick med tre noder), så därför krävs minst tre färger. (Grafen är plan, så vi vet att fyra färger räcker.) En enkel girig heuristik ger en lösning med tre färger, så övre och undre gräns är båda tre.

6d: Grafen innehåller en nod med valensen 5, så därför krävs minst 5 färger. (Enligt Vizings sats räcker det med 6 färger.) En enkel girig heuristik ger en lösning med 5 färger, så övre och undre gräns är båda 5.

Uppgift 7

7a: Använd Dijkstras metod. Vi får följande nodmärkningar: $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 10$, $p_2 = 1$, $y_3 = 9$, $p_3 = 1$, $y_4 = 16$, $p_4 = 2$, $y_5 = 27$, $p_5 = 2$, $y_6 = 26$, $p_6 = 3$, $y_7 = 36$, $p_7 = 6$.

7b: Lösningen i uppgift a ger vägen 1-3-6-7. Billigaste vägträd i uppgift a innehåller även 1-2-5, så om vi sänker kostnaden på båge (5,7) kan vi få vägen 1-2-5-7. Vi har $y_7 = 36$ och $y_5 = 27$, så om vi sätter $c_{57} = y_7 - y_5 = 9$, så blir dessa två vägar lika billiga. Alternativt kan vi sätta $c_{47} = y_7 - y_4 = 20$, så blir vägen 1-2-4-7 lika billig som 1-3-6-7.