Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2016-01-15

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-3	-2	-4	-2	0	0	0
x_5	0	1	2	1	5	1	0	6
x_6	0	1	3	2	3	0	1	8

Först blir x_3 inkommande och x_6 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-1	4	0	4	0	0	16
x_5	0	1/2	1/2	0	7/2	1	-1/2	2
x_3	0	1/2	3/2	1	3/2	0	1/2	4

Nu blir x_1 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	5	0	11	2	1	20
x_1	0	1	1	0	7	2	-1	4
x_3	0	0	1	1	-2	-1	1	2

Därefter fås optimum. $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, ($x_5 = 0$, $x_6 = 0$) och $z = 20$.
Svar: Gör 4 enheter av sort 1 och 2 av sort 3, vilket ger vinst 20. Båda bivillkoren är aktiva.

1b: Skuggpriserna från uppgift a är $y_1 = 2$ och $y_2 = 1$, så mer silikon är bäst.

1c: Ny variabel, x_7, får reducerad kostnad $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = 6 - 2y_1 - 4y_2 = 6 - 4 - 4 = -2 < 0$. Nej, denna produkt förbättrar inte resultatet.

1d: LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\min & v = & 6y_1 & + & 8y_2 & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & y_2 & \geq & 3 & (1) \\
& & 2y_1 & + & 3y_2 & \geq & 2 & (2) \\
& & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 4 & (3) \\
& & 5y_1 & + & 3y_2 & \geq & 2 & (4) \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Grafisk lösning ger optimal duallösning: $y_1 = 2$, $y_2 = 1$ och $v = 20$ (vilket stämmer med uppgift a).

Uppgift 2

2a: 1. Alla i klicken kan samarbeta. En perfekt grupp.
2. Alla i subgrafen kan samarbeta via någon/några i gruppen. Möjlig grupp, lite sämre än fall 1.
3. Alla i subgrafen kan samarbeta via någon/några i gruppen, men det finns bara en väg mellan varje par av personer. Känslig grupp.
4. Alla i subgrafen kan samarbeta via någon/några i gruppen, och det finns två vägar mellan var par av personer. Lite bättre grupp än fall 3.
5. Grupper av personer som inte kan samarbeta. Bör ej vara i samma grupp.
6. Enstaka personer som inte kan samarbeta med någon annan. Passar inte i någon grupp.

Om någon blir sjuk, havererar samarbetet i fall 3 (om personen inte är ett löv). Om två blir sjuka, havererar samarbetet i fall 4.

2b: 1. Ingen i klicken kan samarbeta med någon annan. Alla bör vara i olika grupper.
2. Alla i subgrafen har någon de inte kan samarbeta med. Ingen bra grupp.
3. En bra grupp plockar högst *en* person från varje sammanhängade del.
4. Perfekta personer som kan stoppas in i vilken grupp som helst.

2c: Det handlar här om att finna en maximal matchning. Noderna 2 och 12 är omatchade, och en alternerande, utökande väg mellan dem är 2-1-4-3-6-9-11-12. Alternera matchningen längs den vägen. Detta ger grupperna (1,2), (3,4), (5,8), (6,9), (7,10) och (11,12), och alla är nu med i en grupp.

Uppgift 3

3a: Handelsresandeproblemet i fullständig graf med triangelolikheten. Närmastegranne ger turen 1-2-4-5-7-3-6-1, med kostnaden $8 + 3\sqrt{2} \approx 12.2$.

Billigaste 1-träd kostar $5 + 4\sqrt{2} \approx 10.6$, så vi har en övre gräns på $8 + 3\sqrt{2} \approx 12.2$ och en undre på $5 + 4\sqrt{2} \approx 10.6$. Lösningen är alltså högst $3 - \sqrt{2} \approx 1.6$ från att vara optimal.

3b: Billigaste uppspännandeträdproblemet med rektilinjära avstånd i fullständig graf. Alla avstånd kommer att bli heltaliga, så det passar bra att stega upp kostnaden i Kruskals metod. (I detta exempel behöver man aldrig använda en förbindelse med kostnad större än 2.) Lösning: (1,2), (2,4), (2,6), (3,6), (3,7) och (4,5). Totalkostnad 11.

(Jag har antagit att förgeningar bara kan ske i noder. Annars fås Steinerträdsproblemet, med valfria noder i alla skärningspunkter. Lösningen kan då förbättras genom att göra en förgrening mellan nod 2 och 3, upp mot nod 6, vilket sänker kostnaden till 10.)

3c: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 6 och 7 har udda valens, och det billigaste sättet att höja dessa valenser är att dubblera bågarna (3,6) och (3,7). Finn sedan en Eulertur, vilken kostar 83+17=100. Exempel på lösning: 1-6-3-7-5-4-7-3-4-2-3-6-2-1.

Uppgift 4

4a: Använd Fords metod. Detta ger vägen 1-4-6-7, med kostnad 9.

4b: Nodpriserna är $y_4 = 7$ och $y_3 = 7$, så kostnaden måste vara mindre än $y_3 - y_4 = 0$ för att vägen ska ge förbättring.

Uppgift 5

Grafen innehåller K3 (en klick med 3 noder), så minst 3 färger krävs. Grafen innehåller en nod med valens 5, så minst 5 färger krävs.

Uppgift 6

6a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,3), (1,7), (2,4), (4,5), (6,5) och (7,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 10$, $y_4 = 15$, $y_5 = 22$, $y_6 = 15$, $y_7 = 8$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{21} = 10 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{32} = 18 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{37} = 11 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 13 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{53} = 22 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{63} = 10 > 0$ (optimalt). Lösningen är alltså optimal.

6b: Vi får nu reducerade kostnad $\hat{c}_{35} = -2 < 0$ (ej optimalt, öka), vilket ger x_{35} som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 3-5-6-7-1-3, ändringen blir 2 enheter, och utgående variabel blir t.ex. x_{65} (man kan alternativt välja x_{76} eller x_{17}).

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $y_3 = 10$, $y_4 = 13$, $y_5 = 20$, $y_6 = 15$, $y_7 = 8$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{21} = 8 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{32} = 20 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{37} = 11 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{43} = 11 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{63} = 10 > 0$ (optimalt). $\hat{c}_{65} = 2 > 0$ (optimalt). Lösningen är alltså nu optimal.

6c: Nodpriserna är $y_2 = -1$ och $y_6 = 15$, så vägen måste kosta mindre än $y_6 - y_2 = 16$ för att totalkostnaden ska minskas av att använda den.

6d: Första flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir t.ex. 1-7-6-5, med kapaciteten 4. Skicka 4 enheter. Ändra tillåtna riktningar. Andra flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir t.ex. 1-3-2-4-5, med kapaciteten 4. Skicka 4 enheter. Ändra tillåtna riktningar.

Efter detta saknas flödesökande väg, så maxflöde är funnet. Noderna 1, 3, 6 och 7 blir uppnådda, så minsnitt går mellan dem och resten, dvs. över bågarna (2,1) baklänges, (3,2), (4,3) baklänges, (5,3) baklänges och (6,5).

Uppgift 7

7a: Efter första steget fås $\alpha = (4, 7, 7, 4)$ och $\beta = (0, 7, 0, 7)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 2 och 4 samt kolumn 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 7, 8, 4)$ och $\beta = (0, 7, -1, 7)$. Nu fås lösningen $x_{13} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{42} = 1$, dvs. person 1 springer sträcka 3, person 2 springer sträcka 4, person 3 springer sträcka 1, person 4 springer sträcka 2. Total tid blir 37.

Duallösningen är $\alpha = (5, 7, 8, 4)$ och $\beta = (0, 7, -1, 7)$, och duala målfunktionsvärdet är 37, vilket visar att starka dualsatsen är uppfylld.

7b: α_3 ökas med 7 till 15. Resten av duallösningen samt hela primala optimallösningen är oförändrad. Totala tiden ökar med 7 till 44.