Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2016-03-31

Lösningar

Uppgift 1

1a: Billigaste uppspännandeträdproblemet. Eftersom antalet noder i lösningen är konstant, spelar nodkostnaderna ingen roll. Lös med Kruskals eller Prims metod. Optimallösning (ej unik): (1,6), (2,6), (3,6), (4,5), (5,6), (6,7). Kostnad: 27.

1b: Handelsresandeproblemet. Närmaste granne med start i nod 1 ger ingen tillåten tur, men om man struntar i nod 7 fås turen 1-6-5-4-3-2-1. Nod 7 kan sedan kopplas på via nod 5, vilket ger turen 1-6-5-7-5-4-3-2-1. Därefter kan man ersätta 6-5-7 med 6-7, och få turen 1-6-7-5-4-3-2-1, som kostar 39.

En bra relaxation är billigaste 1-träd, vilket blir (1,2), (1,6), (2,6), (3,6), (4,5), (5,6), (5,7), med kostnaden 34. Vi får alltså undre gräns 34.

Vi har alltså en tur som kostar 39 (övre gräns) och optimum kan inte vara bättre än 34 (undre gräns).

1c: Kinesiska brevbärarproblemet. Dubblera initialt bågarna (1,2) och (3,4). Efter detta är det bara noderna 5 och 7 som har udda valens, och det billigaste sättet att öka dem är att dubblera båge (5,7). Finn sedan en Eulertur i grafen. En möjlig (optimal) tur är 1-2-3-4-5-7-1-2-6-3-4-6-5-7-6-1, som kostar 87.

1d: Det nya nätverket får kostnaderna (från billigaste vägarna) $c_{13} = 9$, $c_{15} = 8$, $c_{35} = 8$. Trivial rundtur är 1-3-5, med kostnad 25. Uppnystning av billigaste vägar ger turen 1-6-3-4-5-6-1.

1e: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,7), (2,3), (2,6), (6,4), (6,5) och (7,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 12$, $y_3 = 17$, $y_4 = 22$, $y_5 = 21$, $y_6 = 17$, $y_7 = 9$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = -5 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{16} = -13 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{34} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{36} = 5 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{54} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{57} = 19 > 0$ (optimalt). Lösningen är alltså optimal.

1f: Vi får reducerade kostnad $\hat{c}_{45} = 2 > 0$ (optimalt), så lösningen är optimal.

1g: Vi får nu reducerade kostnad $\hat{c}_{34} = -1 < 0$ (ej optimalt, öka), vilket ger x_{34} som inkommande variabel (att öka). Cykeln blir 3-4-6-2-3, ändringen blir en enhet, och utgående variabel blir x_{26}.

Nu fås nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 13$, $y_3 = 18$, $y_4 = 22$, $y_5 = 21$, $y_6 = 17$, $y_7 = 9$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = -6 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{16} = -13 < 0$ (optimalt), $\hat{c}_{26} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{36} = 6 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{54} = 1 > 0$ (optimalt), $\hat{c}_{57} = 19 > 0$ (optimalt). Lösningen är nu optimal.

1h: Nodpriserna är $y_2 = 13$ och $y_7 = 9$, så vägen måste kosta mindre än $y_2 - y_7 = 4$ för att totalkostnaden ska minskas av att använda den.

1i: Första flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir 1-7-6-4, med kapaciteten 8. Skicka 8 enheter. Ändra tillåtna riktningar. Andra flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir 1-6-5-4, med kapaciteten 5. Skicka 5 enheter. Ändra tillåtna riktningar. Tredje flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir 1-2-3-4, med kapaciteten 3. Skicka 3 enheter. Ändra tillåtna riktningar. Fjärde flödesökande väg (funnen med Dijkstras metod) blir 1-6-4, med kapaciteten 1. Skicka 1 enhet. Ändra tillåtna riktningar.

Efter detta saknas flödesökande väg, så maxflöde är funnet, styrka 17. Noderna 1 och 7 blir uppnådda, så minsnitt går mellan dem och resten, dvs. över bågarna (1,2), (1,6), (7,6) och (5,7) baklänges.

Uppgift 2

2a: Inför slackvariabler x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-4	-5	-3	-3	0	0	0
x_5	0	1	3	2	1	1	0	7
x_6	0	2	2	1	1	0	1	8

Iteration 1: Först blir x_2 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-7/3	0	1/3	-4/3	5/3	0	35/3
x_2	0	1/3	1	2/3	1/3	1/3	0	7/3
x_6	0	4/3	0	-1/3	1/3	-2/3	1	10/3

Iteration 2: Nu blir x_1 inkommande och x_6 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	-1/4	-3/4	1/2	7/4	35/2
x_2	0	0	1	3/4	1/4	1/2	-1/4	3/2
x_1	0	1	0	-1/4	1/4	-1/2	3/4	5/22

Nu har vi lösningen $x_1 = 2.5$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, ($x_5 = 0$, $x_6 = 0$) och $z = 17.5$. I ord: Ta med 2.5 enheter av material 1 och 1.5 enheter av material 2, vilket ger värdet 17.5. Båda bivillkoren är aktiva. Lösningen är inte optimal, ty $\hat{c}_3 > 0$ och $\hat{c}_4 > 0$, så ökning av x_3 eller x_4 skulle ge bättre lösning.

2b: LP-dual:

$$
\begin{array}{llrcrcll}
\min & v = & 7y_1 & + & 8y_2 & & & \\
\text{då} & & y_1 & + & 2y_2 & \geq & 4 & (1) \\
& & 3y_1 & + & 2y_2 & \geq & 5 & (2) \\
& & 2y_1 & + & y_2 & \geq & 3 & (3) \\
& & y_1 & + & y_2 & \geq & 3 & (4) \\
& & y_1, & & y_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

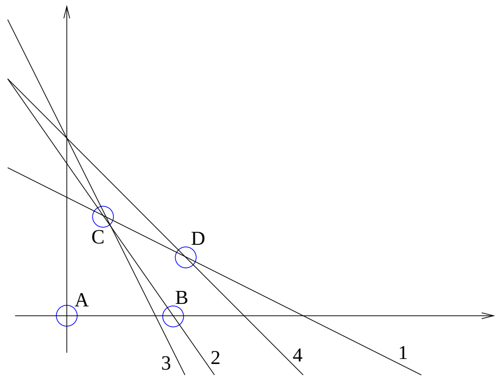
Den påstådda lösningen ger $x_1 > 0$ och $x_4 > 0$, vilket gör att bivillkor 1 och 4 i dualen ska vara aktiva. $y_1 + 2y_2 = 4$ och $y_1 + y_2 = 3$ ger $y_1 = 2$ och $y_2 = 1$. Insättning i duala bivillkor 2 och 3 ger att båda bivillkoren är uppfyllda med strikt olikhet, vilket passar bra med att $x_2 = 0$ och $x_3 = 0$.

Insättning av den primala lösningen i de primala bivillkoren ger att båda bivilkoren är uppfyllda med likhet, vilket passar bra med $y_1 > 0$ och $y_2 > 0$.

Därmed har vi visat att alla komplementaritetsvillkor är uppfyllda och att både primal och dual lösning är tillåtna. Detta verifierar optimalitet. Arne har rätt.

2c: Båda skuggpriserna y_1 och y_2 är större än noll, så man skulle tjäna på både mer vikt och mer volym. (Vikten är dock mer värdefull per enhet.)

2d: Följande duallösningar erhölls: Först A: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, sedan B: $y_1 = 1.67$, $y_2 = 0$, därefter C: $y_1 = 0.5$, $y_2 = 1.75$, och sist D: $y_1 = 2$, $y_2 = 1$. Grafiskt ser man att de tre första inte är dualt tillåtna, medan den sista är det.



Uppgift 3

3a: Noderna 2, 5, 6 och 7 är omatchade. En alternerande, utökande väg är exempelvis 2-1-4-3-8-7. Alternera matchningen längs den vägen. Nu är noderna 5 och 6 omatchade. En alternerande, utökande väg är 5-4-3-6. Alternera matchningen längs den vägen. Detta ger grupperna (1,2), (3,6), (5,4) och (7,8), och alla är nu med i en grupp.

3b: Eftersom det finns minst en båge till varje nod, får vi efter första steget $\alpha = (0,0,0,0)$ och $\beta = (0,0,0,0)$. Man kan inte stryka alla nollor med färre än fyra streck, så vi finner en lösning med de givna nollorna. Vi får samma lösning som i uppgift a. Om någon av dualvariablerna skulle få annat värde än noll (i detta fall 9), så finns ingen tillåten lösning.

3c: Noderna i en tudelad graf kan alltid färgas med två färger. Den högsta nodvalensen är tre, så minst tre färger krävs för en bågfärgning.

Uppgift 4

Jag tar $\leq$-grenen först.

P0: Grafisk lösning ger $x_2 = 6.5$, $x_2 = 0$ och $z = 26$, vilket ger $\bar{z} = 26$.
Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 6$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 7$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 6$, $x_2 = 0.25$, $z = 25.25$, vilket ger $\bar{z} = 25$.
Förgrena över x_2: P3 = P1 + ($x_2 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_2 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, $z = 24$, vilket ger $\bar{z} = 24$.
Lösningen är heltal, så vi får $\underline{z} = 24$. Kapa.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 4.5$, $x_2 = 1$, $z = 23$, vilket ger $\bar{z} = 23$.

Vi har $\bar{z} < \underline{z}$, så vi kapar.
P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, med $z = 24$. Svar i ord: Ta med 6 enheter av sort 1.

Att ta $\geq$-grenen först skulle ge ett större träd. Då är det värdefullt att testa avrundning neråt av P0-lösningen, vilket ger tillåten lösning $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, samt $\underline{z} = 24$. Detta förminskar trädet.