Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2017-04-21

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-5	-2	-4	0	0	0
x_4	0	1	1	0	1	0	70
x_5	0	2	0	3	0	1	50

Först blir x_1 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	-2	3.5	0	2.5	125
x_4	0	0	1	-1.5	1	-0.5	45
x_1	0	1	0	1.5	0	0.5	25

Sedan blir x_2 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	0	0	0.5	2	1.5	215
x_2	0	0	1	-1.5	1	-0.5	45
x_1	0	1	0	1.5	0	0.5	25

Denna tablå är optimal, så optimallösningen blir $x_1 = 25$, $x_2 = 45$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$) med $z = 215$. Svar i ord: Gör 25 av första sorten och 45 av andra sorten. Det ger vinsten 215. Båda bivillkoren är aktiva (eftersom $x_4 = 0$ och $x_5 = 0$), så alla lysdioder går åt.

1b: Duallösning utläst från optimaltablån i uppgift a: $y_1 = 2$, $y_2 = 1.5$. Stoppa in den i de duala bivillkoren och kolla. Stoppa in den och den primala lösningen i komplementaritetsvillkoren och kolla.

1c: Duallösningen är också skuggpriser, så röda dioder skulle ge störst förbättring. Eftersom $y_1 = 2$, så blir det fortfarande förbättring om man betalar 1 kr. Så ja, köp en röd diod till.

1d: Ny variabel, x_6, med $a_6 = (1, 1)$, vilket ger reducerad kostnad $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (2 + 1.5) = c_6 - 3.5$. För att får $\hat{c}_6 > 0$ krävs $c_6 > 3.5$.

1e: 17 variabler och 3 bivillkor ger 3 basvariabler, så det blir (högst) tre olika kontruktioner i optimallösningen.

1f: P0: Lösningen i uppgift a är $x_1 = 2.5$, $x_2 = 4.5$, $x_3 = 0$ med $z = 21.5$, så $\bar{z} = 21$. Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 3$).

P1: Fixera x_1 till 2 och eliminera. Lös resten grafiskt eller med inspektion. $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1/3$, $z = 21.333$, vilket ger $\bar{z} = 21$.
Förgrena över x_3: P3 = P1 + ($x_3 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_3 \geq 1$).
P3: Inspektion ger lösningen $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $z = 20$, vilket ger $\underline{z} = 20$. Spara lösningen och kapa grenen.
P4: Fixera x_3 till 1 och eliminera. Lös resten grafiskt eller med inspektion.
$x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_3 = 1$, $z = 17$. Kapa grenen eftersom $z \leq \underline{z}$.

P2: $x_1 \geq 3$ gör att bivillkor 2 inte kan uppfyllas. Ingen tillåten lösning. Kapa grenen.

Trädet avsökt.

Bästa lösning $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, med $z = 20$.
Svar i ord: Gör två tio-pack av sort 1 och 5 av sort 2, vilket ger vinsten 20.

Uppgift 2

2a: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 4 och 5 har udda valens, och billigaste sättet att öka dessa är att dubblera bågarna (4,8) och (5,8) (dvs. köra två gånger i dessa bågar). En optimal rundtur är t.ex. 1-2-4-3-5-8-4-8-5-6-7-8-1, vilket kostar 51+9=60. Turen är inte unik.

2b: Detta betyder att alla bågar dubbleras, vilket gör att alla noder får jämn valens, så någon tredje gång behövs aldrig.

2c: Billigaste uppspännande träd-problemet. Lös med Kruskal eller Prim. Totalkostnad: 31.

2d: Handelsresandeproblemet. För varje nod som har valens två, vet vi att båda anslutande bågarna måste vara med i lösningen. I detta fall ger det en helt fixerad lösning, nämligen turen 1-2-4-3-5-6-7-8-1, vilken kostar 42. En bra relaxation är billigaste 1-träd, vilket får kostnaden 38. Vi har alltså en tillåten lösning, som ger övre gräns på 42, samt en undre gräns på 38, så i värsta fall är vår lösning 4 dyrare än optimum. (Å andra sidan såg vi ovan att ingen annan tillåten lösning existerar.)

Uppgift 3

3a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (1,8), (4,3), (7,6), (5,8), (8,4) och (8,5). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 17$, $y_4 = 10$, $y_5 = 11$, $y_6 = 6$, $y_7 = 1$, $y_8 = 6$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{42} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{65} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = l$). Alla bågar uppfyller optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal.

3b: Nu blir $\hat{c}_{65} = -1 < 0$, vilket inte är optimalt. Vi vill öka x_{65}, som blir inkommande variabel. Cykeln blir 6-5-8-7-6, och den största ändring som kan göras är 2 p.g.a. båge (7,8), så x_{78} blir utgående variabel.

Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 17$, $y_4 = 10$, $y_5 = 11$, $y_6 = 7$, $y_7 = 2$, $y_8 = 6$, och reducerade kostnaderna $\hat{c}_{42} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{78} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar uppfyller nu optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal.

3c: För att minska flödet i båge (1,2), måste man ändra flödet i en cykel som innehåller båge (1,2) bakåt. För att kunna använda minkostnadsflödesteknik vill man fortfarande ha en baslösning, vilket betyder att flödet i bara en ickebasbåge får ändras. Denna båge kommer då att bli inkommande i den tvångspivotering vi gör.

Den enda cykel som fungerar är 2-1-8-4-2, vilket ger (4,2) som inkommande båge, att öka. I uppgift a fick vi $\hat{c}_{42} = 5$, vilket helt enkelt betyder att kostnaden ökar med 5 för varje enhets flödesändring. Skulle vi lyckas skicka runt de två enheter som går i båge (1,2), skulle det ge en kostnadsökning på 10.

Tyvärr tillåter inte båge (1,8) denna ändring, så det går inte att tömma båge (1,2).

3d: Maximal flödesökande väg från nod 1 till nod 3, funnen med Dijkstras metod, blir 1-8-4-3, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter och ändra tillåtna riktningar (båge (1,8) blir full). I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka/nå nod 1 och 2, så minsnittet innehåller bågarna (1,8) framåt och (4,2) bakåt. Maxflödet är 5.

Utöka kapaciteten på båge (1,8).

3e: Använd Dijkstras metod, vilket ger följande nodpriser, vilka ju anger avståndet från nod 7: $y_1 = -$, $y_2 = 11$, $y_3 = 14$, $y_4 = 9$, $y_5 = 5$, $y_6 = 5$, $y_7 = 0$. Nod 1 kan inte nås från nod 7 (men Göte har ju egna kor, så det gör inte så mycket).

Uppgift 4

Matchningsproblem. Finn alternerande, utökande väg mellan två icke matchade noder, t.ex. 7-6-8-4-5-3. Skifta matchade bågar längs den vägen. Detta leder till följande matchning/nodpar: 2-9, 3-5, 4-8, 6-7. Nu är bara en nod, 1, omatchad, så bättre matchning finns ej.

Uppgift 5

Man måste först dubblera de två raderna i matrisen (eftersom varje person ska göra två uppgifter). Sedan körs normala ungerska metoden.

Efter första steget fås $\alpha = (5, 5, 6, 6)$ och $\beta = (5, 0, 3, 10)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 2 samt kolumn 2, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (6, 6, 6, 6)$ och $\beta = (5, -1, 3, 10)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{14} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{41} = 1$, och total arbetstid blir 41. Svar: Roy ska laga bil 3 och 4, och Roger bil 1 och 2.

Optimal duallösning är $\alpha = (6, 6, 6, 6)$ och $\beta = (5, -1, 3, 10)$. Summering av duallösningen ger 41, så starka dualsatsen är uppfylld.

Uppgift 6

6a: En enkel heuristik ger en lösning med 3 färger. Grafen innehåller en klick av storlek 3, så minst 3 färger krävs. Alltså är lösningen optimal.

6b: Grafen innehåller en nod, 8, med valens 6, så minst 6 färger krävs. Börja med att färga alla bågarna till nod 8 med var sin färg. Därefter är det enkelt att färga resten av bågarna med någon av de 6 färgerna. Vi har alltså övre och undre gräns lika med 6, så lösningen är optimal.