Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2017-01-13

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_4 - x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-3	-4	-5	0	0	0	0
x_4	0	0	1	1	1	0	0	6
x_5	0	1	2	1	0	1	0	8
x_6	0	2	3	2	0	0	1	20

Först blir x_3 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-3	1	0	5	0	0	30
x_3	0	0	1	1	1	0	0	6
x_5	0	1	1	0	-1	1	0	2
x_6	0	2	1	0	-2	0	1	8

Sedan blir x_1 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	4	0	2	3	0	36
x_3	0	0	1	1	1	0	0	6
x_1	0	1	1	0	-1	1	0	2
x_6	0	0	-1	0	0	-2	1	4

Denna tablå är optimal, så optimallösningen blir $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 4$) med $z = 36$. Svar i ord: Gör 2 av första sorten och 6 av tredje sortens datorer. Det ger vinsten 36. De två första bivillkoren är aktiva (eftersom $x_4 = 0$ och $x_5 = 0$) men det tredje är inte det (ty $x_6 > 0$).

1b: Duallösning utläst från optimaltablån i uppgift a: $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 0$. Stoppa in den i de duala bivillkoren och kolla. Stoppa in den och den primala lösningen i komplementaritetsvillkoren och kolla.

1c: Duallösningen är också skuggpriser, så komponentsort 2 skulle ge störst förbättring.

1d: I optimaltablån är $\hat{c}_2 = 4$, så c_2 skulle behöva var mer än 4 enheter större för att x_2 skulle bli inkommande, dvs. c_2 ska vara större än 8 för att optimallösningen ska ändras.

Uppgift 2

2a: Efter första steget fås $\alpha = (3, 3, 2, 3, 2)$ och $\beta = (7, 2, 5, 12, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 4 samt kolumn 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (3, 4, 3, 3, 3)$ och $\beta = (7, 2, 5, 12, -1)$. Nu fås lösningen $x_{14} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{55} = 1$, och total arbetstid blir 41.

Optimal duallösning är $\alpha = (3, 4, 3, 3, 3)$ och $\beta = (7, 2, 5, 12, -1)$. Summering av duallösningen ger 41, så starka dualsatsen är uppfylld.

4b: Efter första steget fås $\alpha = (0, 1, 0, 0, 0)$ och $\beta = (10, 5, 8, 15, 2)$, samt lösningen $x_{14} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{55} = 1$. (Samma som förut.)

Ja, det går fortare. Att börja med den dimensionen där kostnaderna är mer lika ger större effekt (dvs. lägre reducerade kostnader), och därmed kanske snabbare flera nollor.

Uppgift 3

3a: Kinesiska brevbärarproblemet. Ta bort båge (3,4). (Man skulle kunna använda den för transport, men det är knappast aktuellt, eftersom båda noderna får jämn valens.) Nu får noderna 1, 2, 6 och 7 udda valens, och billigaste sättet att öka dessa är att dubblera bågarna (1,2) och (6,7). En optimal rundtur är t.ex. 1-2-3-5-4-6-7-1-5-7-6-2-1, vilket kostar 66+9=75. Turen är inte unik.

3b: Metoden minimerar extraarbetet, vilket sker med sammma (högre) hastighet, så lösningen ändras inte. Dock fås ett annat målfunktionsvärde, i detta fall 66+9/2=70.5.

3c: Handelsresandeproblemet. Närmaste-granne som startar i nod 4 ger turen 4-6-7-1-2-3-5-4, vilken kostar 35. (Samma lösningen kan fås genom att flytta en båge i billigaste 1-träd.) En bra relaxation är billigaste 1-träd, vilket får kostnaden 33. Vi har alltså en tillåten lösning, som ger övre gräns på 35, samt en undre gräns på 33, så i värsta fall är vår lösning 2 dyrare än optimum.

3d: Om vi inte tillåter återbesök, får man bara använda två bågar till mittnoden, vilket betyder att alla tillåtna lösningar använder alla bågar i den yttre ringen förutom en, som ersätts av bågarna till och från mittnoden. Om bågen mellan nod i och j ersätts av bågarna (i, k) och (k, j) så ökar kostnaden med $c_{ik} + c_{kj} - c_{ij}$. I ett hjul är mittnoden k given och nod j är den som följer direkt efter nod i i yttre ringen, så för varje i är j och k givna, vilket betyder att vi bara behöver iterera över i för att hitta den lägsta kostnadsökningen, $\min_i(c_{ik} + c_{kj} - c_{ij})$. Komplexiteten blir alltså $O(n)$. På exemplet ger detta samma tur som ges i uppgift a. Notera att denna metod ger exakt optimum.

3e: Nodövertäckningsproblemet. Heuristik: Välj noden med högst valens, stryk täckta bågar. Upprepa. I exemplet börjar vi med nod 5, och sedan antingen 1, 3 och 6, eller 2, 4 och 7.

Uppgift 4

4a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,7), (2,3), (3,4), (5,4), (6,4) och (7,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 5$, $y_4 = 14$, $y_5 = 5$, $y_6 = 11$, $y_7 = 5$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{15} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 13 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{75} = 8 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar uppfyller optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal.

4b: Nu blir $\hat{c}_{15} = -1 < 0$, vilket inte är optimalt. Vi vill öka x_{15}, som blir inkommande variabel. Cykeln blir 1-5-4-6-7-1, och den största ändring som kan göras är 1 p.g.a. båge (6,4), så x_{64} blir utgående variabel.

Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $y_3 = 4$, $y_4 = 13$, $y_5 = 4$, $y_6 = 11$, $y_7 = 5$, reducerade kostnaderna $\hat{c}_{12} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{64} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 14 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{75} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$).

Alla bågar uppfyller nu optimalitetskriterierna, så lösningen är optimal.

4c: $\hat{c}_{73} = c_{73} + y_7 - y_3 = c_{73} + 1 < 0$ om $c_{73} < -1$ (vilket nog inte händer).

4d: Börja med att lägga ut det angivna flödet på bågarna, och markera tillåtna riktningar. Sök sedan maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-5-6-4, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka/nå alla noder utom 4, så minsnittet går runt nod 4, dvs. innehåller bågarna (3,4), (5,4) och (6,4). Maxflödet är 14.

4e: Använd Dijkstras metod, vilket ger följande nodpriser (som ju är proportionella mot tiden det tar): $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 8$, $y_4 = 14$, $y_5 = 7$, $y_6 = 11$, $y_7 = 5$. (Jag har använt data från uppgift a.)

Uppgift 5

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 6$, $x_2 = 1.25$ och $z = 35$, vilket ger $\bar{z} = 35$.
(Ev: Avrundning neråt ger tillåten lösning $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, samt $\underline{z} = 34$.) Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 1$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 2$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, $z = 34$, vilket ger $\underline{z} = 34$. Spara lösningen och kapa grenen.
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 4.8$, $x_2 = 2$, $z = 32$. Kapa grenen eftersom $z \leq \underline{z}$.

Trädet avsökt. (Om man går ner i den andra grenen först och inte använder avrundningsheuristiken, fås ett större träd.)

Bästa lösning $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, med $z = 34$. Svar i ord: Lagra 6 datorer i nod 1 och en i nod 2, vilket ger nyttan 34.

Uppgift 6

6a: Finn en alternerande väg mellan två omatchade noder, t.ex. 1 och 6, exempelvis 1-3-4-6, och alternera matchningen längs vägen. Då blir bågarna (1,3) och (4,6) matchade, och båge (3,4) inte. Nu är alla noder utom en matchade, så bättre går inte att få.

6b: Grafen innehåller en klick av storlek 3, så minst 3 färger krävs. En enkel heuristik ger en lösning med 3 eller 4 färger, så undre gräns är 3 och övre 3 eller 4. (F.ö. är grafen plan, så mer än 4 ska inte behövas, vilket dock inte betyder att en heuristik alltid är så bra.)