Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2017-08-26

Lösningar

Uppgift 1

1a: Kinesiska brevbärarproblemet. Om den ena noden har valens ett, måste man köra fram och tillbaka till den noden, och städa åt ena hållet (spelar ingen roll vilket), så det finns bara ett sätt att åtgärda den bågen. Därför kan man ta bort noden och bågen, och komma ihåg tiden det tog (för att efteråt addera den till totaltiden).

I exemplet elimineras noderna i följande ordning, med körtid inom parentes: 17 (6), 16 (10), 15 (20), 14 (12), 13 (30), 18 (4), 12 (14), 1 (8), 2 (14), 8 (12). Den totala tiden detta tar är 130.

1b: I den återstående grafen har nod 4 och 6 udda valens och billigaste sättet att höja dessa valenser är bågen (4,6). Vi dubblerar alltså den, och får t.ex. följande tur: 3-4-6-5-4-6-7-5-3-10-11-9-7-3, med kostnad 61. Tur inklusive reducerade bitar: 3-4-6-5-4-6-7-8-7-5-3-10-11-12-18-12-13-14-13-15-16-15-17-15-13-12-11-9-7-3-2-1-2-3. Totalt avstånd: $130 + 61 = 191$.

1c: För det första har alla bågar som reducerats bort redan körts på två gånger. I resten av grafen dubbleras alla bågar, vilket direkt ger jämn valens för alla noder, så inga mer bågar behöver läggas till. Kostnaden för den reducerade delen blir därför oförändrad. I den återstående grafen finns en lösning med kostnad precis två gånger summan av bågkostnaderna, $2 * 55 = 110$, så den totala kostnaden (avståndet) blir $110 + 130 = 240$, vilket är betydligt mindre än $2 * 191 = 382$. Även om man bara betraktar den ej reducerade delen blir kostnaden,110, mindre än $2 * 61 = 122$.

Uppgift 2

2a: Använd Dijkstras metod. Billigaste väg-sökning från nod 16 till nod 5 ger bl.a. följande nodpriser: $y^1_{12} = 30$, $y^1_{11} = 37$, $y^1_{10} = 40$, $y^1_9 = 40$. Billigaste väg-sökning från nod 5 till nod 16 med kostnad $3c$ ger bl.a. följande nodpriser: $y^2_9 = 27$, $y^2_{10} = 30$, $y^2_{11} = 36$, $y^2_{12} = 57$. Max av dessa två nodpriser ger första tidpunkt där båda kan vara där: $y_9 = 40$, $y_{10} = 40$, $y_{11} = 37$, $y_{12} = 57$. Vi ser nu att nod 11 har det lägsta nodpriset, så de bör träffas där.

2b: Utgå från resultatet i uppgift 2a och finn de två angränsande noderna 11 och 12, där $y^1_{11} > y^2_{11}$ och $y^1_{12} < y^2_{12}$. Finn skärningspunkten mellan de två linjerna $37 - t$ och $36 + 3t$, vilket blir $37 - t = 36 + 4t$, vilket ger $t = 1/4$. De ska alltså träffas 0.25 längdenheter från nod 11 på bågen mot nod 12. Då har Lill-Bengt gått sträckan 36.75, och Gammel-Berta har gått lika länge, men bara sträckan 12.25.

2c: Vid multiplikation: ja (alla nodpriser kommer att multipliceras med faktorn, så alla storleksrelationer mellan dem kommer att vara oförändrade). Vid addition: nej (kostnaden ökar mer för vägar med flera bågar).

Uppgift 3

3a: Inför slackvariabler x_4, x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-5	-4	-2	0	0	0	0	0
x_4	0	2	2	1	1	0	0	0	10
x_5	0	1	1	1	0	1	0	0	8
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	4
x_7	0	0	1	0	0	0	0	1	3

Först blir x_1 inkommande och x_6 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	-4	-2	0	0	5	0	20
x_4	0	0	2	1	1	0	-2	0	2
x_5	0	0	1	1	0	1	-1	0	4
x_1	0	1	0	0	0	0	1	0	4
x_7	0	0	1	0	0	0	0	1	3

Sedan blir x_2 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	2	0	1	0	24
x_2	0	0	1	1/2	1/2	0	-1	0	1
x_5	0	0	0	1/2	-1/2	1	0	0	3
x_1	0	1	0	0	0	0	1	0	4
x_7	0	0	0	-1/2	-1/2	0	1	1	2

Denna tablå är optimal, så optimallösningen blir $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 3$, $x_6 = 0$, $x_7 = 2$) med $z = 24$. Svar i ord: Göte ska ta med 4 kg brända mandlar och 1 kg marsipangodis, vilket ger vinst 24. Det första och tredje bivillkoret är aktivt, eftersom slackvariablerna är noll.

3b: Duallösning: $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$. Stoppa in och kolla.

3c: Skuggpriser utlästa från optimaltablån i uppgift a: $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$. Detta säger att ökning av högerled 1 ger vinstökning med 2 per enhet, och ökning av högerled 3 ger vinstökning med 1 per enhet, medan ökningar av högerled 2 och 4 inte ger någon effekt.

3d: Ny variabel x_8: reducerad kostnad $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = 4 - (2y_1 + 2y_2) = 4 - 4 = 0$, så spunnet socker skulle inte ge någon förbättring.

Uppgift 4

4a: Handelsresandeproblem. Närmaste granne-heuristiken ger turen: 1-7-8-5-3-4-6-2-1, med kostnad 56. Billigaste 1-träd ger kostnad 54, så vi får övre gräns 56 och undre gräns 54. Vår lösning ligger inte mer än 2 från optimala målfunktionsvärdet.

4b: I närmaste-granneheuristiken vet man vilken båge det är i ordningen i turen (dvs. känner till k), så då kan man helt enkelt använda korrekt c_k.

Uppgift 5

5a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,4), (1,5), (5,6), (2,6), (6,8) samt t.ex. (6,3). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 8$, $y_4 = 11$, $y_5 = 3$, $y_6 = 5$, $y_7 = 8$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{17} = -6 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{25} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{34} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{74} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla bågar uppfyller optimalitetskriterierna, så lösningen var optimal.

5b: Nu blir $\hat{c}_{17} = 12 > 0$, vilket inte är optimalt. Vi vill minska x_{17}, som blir inkommande variabel. Cykeln blir 7-1-5-6-7, och den största ändring som kan göras är 1 p.g.a. båge (6,7), så x_{67} blir utgående variabel. Det enda nodpris som ändras är $y_7 = 20$, vilket ger nya reducerade kostnader $\hat{c}_{67} = -12 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{74} = 11 > 0$ (ej optimalt ty $x = u$).

Vi vill minska x_{74}, som blir inkommande variabel. Cykeln blir 7-1-4-7, och den största ändring som kan göras är 2 p.g.a. båge (1,7), så x_{17} blir utgående variabel.

Det enda nodpris som ändras är $y_7 = 9$, vilket ger nya reducerade kostnader $\hat{c}_{67} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{74} = 0$ (optimalt). Nu uppfyller alla bågar optimalitet-skriterierna, och lösningen är optimal.

5c: $\hat{c}_{17} = c_{17} + y_1 - y_7 = c_{17} - 8 > 0$ om $c_{17} > 8$.

Uppgift 6

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 5.5$, $x_2 = 2.5$ och $z = 35$, vilket ger $\bar{z} = 35$.
Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 5$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 6$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $z = 34$, tillåten heltalslösning, vilket ger $\underline{z} = 34$. Spara lösningen och kapa grenen.
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, $z = 33$. Kapa, ty $z = 33 < \underline{z}$.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, med $z = 34$. Svar i ord: Välj 5 stånd med ätbara varor och 3 andra till torget.

Uppgift 7

Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 8-1-4, med kapacitet 9. Skicka 9 enheter och ändra tillåtna riktningar. Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 8-2-6-3-4, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 8-2-5-6-9-7-4, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka/nå noderna 8, 1, 2, 5, 6, 9, men inte 3, 4, 7, så minsnittet går mellan dessa noder, över bågarna (1,4), (1,7), (9,7), (6,7) och (6,3). Maxflödet är 18.

Uppgift 8

8a: Efter första steget fås $\alpha = (6, 7, 5, 4, 6)$ och $\beta = (0, 3, 2, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 2 och 3 samt kolumn 4 och 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (7, 7, 5, 5, 7)$ och $\beta = (0, 3, 2, -1, -1)$. Nu fås lösningen $x_{13} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{45} = 1$, $x_{54} = 1$, och total kostnad blir 34.

Optimal duallösning är $\alpha = (7, 7, 5, 5, 7)$ och $\beta = (0, 3, 2, -1, -1)$. Summering av duallösningen ger 34, så starka dualsatsen är uppfylld.

8b: Reducerad kostnad för position (3,1) är $\hat{c}_{31} = c_{31} - \alpha_3 - \beta_1$, vilket för optimal duallösning blir $\hat{c}_{31} = c_{31} - 5$, så för att få $\hat{c}_{31} < 0$, krävs $c_{31} < 5$, dvs. person 1 måste sänka sin kostnad med mer än 11 för att få passet. (Detta kan också ses genom att $\hat{c}_{31} = 11$ i optimala matrisen.)