Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2017-10-17

Lösningar

Uppgift 1

1a: Finn billigaste väg från nod 1 till nod 8 med Dijkstras metod. Det ger följande nodpriser, $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$, $y_4 = 14$, $y_5 = 12$, $y_6 = 17$, $y_7 = 17$, $y_8 = 24$, och föregångare $p_1 = -$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $p_4 = 3$, $p_5 = 2$, $p_6 = 5$, $p_7 = 4$, $p_8 = 7$. Vägen blir alltså 1-3-4-7-8, med kostnad 24.

1b: Billigaste väg med negativa kostnader kräver Fords metod. Det ger följande nodpriser, $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$, $y_4 = 3$, $y_5 = 10$, $y_6 = 1$, $y_7 = 6$, $y_8 = 9$, och föregångare $p_1 = -$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $p_4 = 2$, $p_5 = 4$, $p_6 = 4$, $p_7 = 4$, $p_8 = 6$. Vägen blir alltså 1-2-4-6-8, med kostnad 9.

1c: Använd nodpriser: $y_6 = 17$ och $y_8 = 24$, så båge (6,8) förbättrar lösningen om $2c_{68} < y_8 - y_6 = 7$, dvs. om $c_{68} < 3.5$.

Uppgift 2

Om vi sätter $u = 1$ och finner maxflöde från nod 1 till nod 8, blir ju maxflödet lika med maximalt antal vägar från nod 1 till 8 som inte använder samma båge. Minsnittet går ju över alla vägar, på det ställe där antalet är minst, så då går det åt minst antal bakhåll.

Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får t.ex. vägen 1-2-4-8, med kapacitet 1. Skicka 1 enhet och ändra tillåtna riktningar. (Alla bågar längs vägen blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får t.ex. vägen 1-3-7-8, med kapacitet 1. Skicka 1 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Alla bågar längs vägen blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-7-3-4-6-8, med kapacitet 1. Skicka 1 enhet och ändra tillåtna riktningar. (Alla bågar längs vägen blir fulla, förutom (3,7) som användes bakåt.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka/nå nod 1, så minsnittet går mellan nod 1 och resten, dvs. över bågarna (1,2), (1,3) och (1,7) (samt (4,1) åt fel håll). Maxflödet är 3, och det räcker med tre bakhåll.

Uppgift 3

3a: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 3, 4, 6 och 8 har udda valens. Det billigaste sättet att höja dessa valenser är att dubblera båge (3,4) och båge (6,8), med ökad kostnad 12. Exempel på tur: 1-2-3-1-4-2-5-6-8-7-3-5-4-6–8-4-3-4-7-1. Totalkostnad: 157.

3b: Handelsresandeproblemet (med återbesök). Närmaste granne-heuristiken ger följande start på turen: 1-2-3-4-7-8-6-5, därefter saknas direktbåge till nod 1, men om man tillåter återbesök, kan man ta vägen 5-4-1 (eller 5-2-1). Kostnad blir då 52 eller 49. Metoden man använder är då närmaste granne, där återbesök tillåts om ingen annan möjlighet finns. Billigaste 1-träd ger kostnad 41, så vi får övre gräns 52 (eller 49) och undre gräns 41. Vår lösning ligger inte mer än 11/8 från optimala målfunktionsvärdet.

Uppgift 4

4a: Tillordningsproblemet. Lös med ungerska metoden. Efter första steget fås $\alpha = (3, 2, 3, 2, 4)$ och $\beta = (0, 1, 2, 1, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och kolumn 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (3, 3, 4, 3, 5)$ och $\beta = (0, 1, 2, 1, -1)$. Man kan nu stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 3 och 4, samt kolumn 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (3, 4, 4, 3, 6)$ och $\beta = (0, 1, 2, 1, -2)$. Nu fås lösningen $x_{12} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kostnad blir 22. Svar i ord: Grodo tar sträcka 2, Sammy tar 4, Jerry tar 1, Pippeline tar 3 och Gamli tar 5. Total tid 22.

Optimal duallösning är $\alpha = (3, 4, 4, 3, 6)$ och $\beta = (0, 1, 2, 1, -2)$. Summering av duallösningen ger 22, så starka dualsatsen är uppfylld.

4b: Reducerad kostnad för position (1,5) är $\hat{c}_{15} = c_{15} - \alpha_1 - \beta_5$, vilket för optimal duallösning blir $\hat{c}_{15} = c_{15} - 1$, så för att få $\hat{c}_{15} \leq 0$, krävs $c_{15} \leq 1$. (Detta kan också ses genom att $\hat{c}_{15} = 2$ i optimala matrisen.) Grodo måste öva.

Uppgift 5

5a: Vi vill finna maximal matchning, dvs. en matchning som inkluderar så många noder som möjlgt. Vi söker utökande väg, och finner t.ex. 2-1-6-7. Byte av matchningen längs den vägen ger grupperna 1-2, 6-7 och 3-5. Nu finns bara en omatchad nod (4), så bättre lösning finns inte. Person 4 får gå ensam.

5b: Vi vill veta om det är en *tudelad* graf. Om så är fallet, ska noderna i första nivån ta första båten, och noderna i andra nivån ta andra båten. Det går bra, eftersom det inte går några bågar inom nivåerna. I detta fall går det bra. I första båten/nivån är noderna/personerna 1, 3 och 4, och i den andra 2, 5, 6 och 7. I en tudelad graf kan noderna färgas med två färger, så en metod för nodfärgning kan passa.

5c: Då bildas en klick med tre noder, 3, 4, 7, så då är grafen inte tudelad längre, och ingen tillåten lösning finns. Det krävs minst tre färger för att färga noderna.

5d: Nu har vi ett allmänt nodfärgningsproblem. Alla noder som ska vara i samma båt ska ha samma färg, och det får inte finnas några bågar mellan dessa noder.

Uppgift 6

6a: Kvarvarande problem efter fixeringar:

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 4x_5 + 7x_6 + 8x_7 + 15 \\ \text{då} & & 5x_5 + 4x_6 + 5x_7 \leq 6 \\ & & x_j \in \{0, 1\} \text{ för alla } j \end{array}$$

Lös med Land-Doig-Dakins metod. LP-relaxationen: kvoterna c_j/a_j är 0.8, 1.75 och 1.6, så x_6 är bäst, följt av x_7 och x_5.

P0: LP-lösningen blir $x_5 = 0$, $x_6 = 1$ och $x_7 = 0.4$ med $z = 10.2$, vilket ger $\bar{z} = 10$.
Förgrena över x_7: P1 = P0 + ($x_7 \leq 0$), P2 = P0 + ($x_7 \geq 1$).

P2: ($x_7 = 1$) LP-lösningen blir $x_5 = 0$, $x_6 = 0.25$ och $x_7 = 1$ med $z = 9.75$, vilket ger $\bar{z} = 9$.
Förgrena över x_6: P3 = P2 + ($x_6 \leq 0$), P4 = P2 + ($x_6 \geq 1$).
P4: ($x_6 = 1$, $x_7 = 1$) LP-problemet saknar tillåten lösning. Kapa.
P3: ($x_6 = 0$, $x_7 = 1$) LP-lösningen blir $x_5 = 0.2$, $x_6 = 0$ och $x_7 = 1$ med $z = 8.8$, vilket ger $\bar{z} = 8$.
Förgrena över x_5: P5 = P3 + ($x_5 \leq 0$), P6 = P3 + ($x_5 \geq 1$).
P6: ($x_5 = 1$, $x_6 = 0$, $x_7 = 1$) LP-problemet saknar tillåten lösning. Kapa.
P5: ($x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 1$) LP-lösningen (helt fixerad) blir $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ och $x_7 = 1$ med $z = 8$. Tillåten heltalslösning ger $\underline{z} = 8$. Spara lösningen och kapa grenen.
P1: ($x_7 = 0$) LP-lösning: $x_1 = 0.4$, $x_6 = 1$, $x_7 = 0$, $z = 8.6$, vilket ger $\bar{z} = 8$. Ingen bättre lösning kan finnas, kapa grenen.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 1$, med $z = 8$. Svar i ord: Ara-Göran får följa med.

6b: Olikhet från minimala övertäckningar: $x_6 + x_7 \leq 1$, skär bort LP-optimum, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$, $x_7 = 0.4$.

Uppgift 7

7a: Inför slackvariabler x_4, x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-8	-6	-3	0	0	0	0	0
x_4	0	3	3	3	1	0	0	0	21
x_5	0	2	3	4	0	1	0	0	22
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	6
x_7	0	0	1	0	0	0	0	1	4

Först blir x_1 inkommande och x_6 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	-6	-3	0	0	8	0	48
x_4	0	0	3	3	1	0	-3	0	3
x_5	0	0	3	4	0	1	-2	0	10
x_1	0	1	0	0	0	0	1	0	6
x_7	0	0	1	0	0	0	0	1	4

Sedan blir x_2 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	0	3	2	0	2	0	54
x_2	0	0	1	1	1/3	0	-1	0	1
x_5	0	0	0	1	-1	1	1	0	7
x_1	0	1	0	0	0	0	1	0	6
x_7	0	0	0	-1	-1/3	0	1	1	3

Denna tablå är optimal, så optimallösningen blir $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 7$, $x_6 = 0$, $x_7 = 3$) med $z = 54$. Svar i ord: Bosse ska ta med 6 kg alvkex och ett kg hobbitkakor, men inga morötter, vilket ger energi 54. Det första och tredje bivillkoret är aktivt, eftersom slackvariablerna är noll, vilket betyder att kappsäckens storlek och tillgänglig mängd alvkex är begränsande, men t.ex. inte vikten.

7b: Skuggpriser utlästa från optimaltablån i uppgift a: $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = 0$. Han skulle alltså tjäna 2 per enhets större kappsäck, men inget på att kunna bära tyngre.

7c: Ny variabel x_8: reducerad kostnad $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = 3-(2y_1+2y_2) = 3-4 = -1 < 0$, så russin skulle inte ge någon förbättring.

Uppgift 8

8a: Minkostnadsflödesproblem, använd simplexmetoden. Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,2), (1,5), (3,4), (5,4) och (5,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 8$, $y_3 = 12$, $y_4 = 22$, $y_5 = 10$, $y_6 = 21$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{25} = 8 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{26} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{64} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar uppfyller optimalitetskriterierna, så lösningen var optimal.

8b: Nu blir $\hat{c}_{13} = 8 > 0$, vilket inte är optimalt. Vi vill minska x_{13}, som blir inkommande variabel. Cykeln blir 3-1-5-4-3, och den största ändring som kan göras är 2 p.g.a. båge (1,3) (eller (3,4)), så vi väljer x_{13} som utgående variabel. Vi har nu samma basträd, och får samma nodpriser och samma reducerade kostnader. Den enda skillnaden är att $\hat{c}_{13} = 8 > 0$ nu är optimalt, ty $x = 0$.

8c: $\hat{c}_{13} = c_{13} + y_1 - y_3 = c_{13} - 12 > 0$ om $c_{13} > 12$.