Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering gk
Lösning till tentamen
2018-01-02

Lösningar

Uppgift 1

1a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (2,4), (3,5) och (4,5) samt några bågar som får med nod 1 och 6 i trädet. Jag väljer (1,4) och (1,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 10$, $y_4 = 6$, $y_5 = 15$, $y_6 = 6$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{23} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{46} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla bågar uppfyller optimalitetsvillkoren, så lösningen är optimal. (Om man väljer andra basbågar kan man få göra någon iteration med basbyte, men ändringen noll i flödet.)

1b: Nu fås $\hat{c}_{43} = 1 > 0$, vilket inte är optimalt, ty $x = u$. Välj x_{43} som inkommande variabel, att minska. Cykeln blir 3-4-5-3, och maximal ändring blir 1 p.g.a. båge (4,5) (eller (3,5)). Välj båge (4,5) som utgående. Nu får vi nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 11$, $y_4 = 6$, $y_5 = 16$, $y_6 = 6$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{23} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{46} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla bågar uppfyller optimalitetsvillkoren, så lösningen är optimal.

1c: $\hat{c}_{23} = c_{23} + y_2 - y_3 = c_{23} - 10 < 0$ om $c_{23} < 10$. Minska med 4 eller mer.

Uppgift 2

2a: Handelsresandeproblem. Modifiering av billigate 1-träd ger turen 1-2-4-3-5-6-1, med kostnaden 43. Billigaste 1-träd ger kostnad 39, så vi får övre gräns 43 och undre gräns 39.

2b: Nej. Det blir alltid dyrare att ta omvägen via nod 1 än att åka direkt mellan noderna.

Uppgift 3

3a: Efter första steget fås $\alpha = (-8, -8, -9, -7, -6)$ och $\beta = (0, 1, 1, 0, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 5 samt kolumn 1 och 4, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (-7, -7, -9, -6, -6)$ och $\beta = (-1, 1, 1, -1, 1)$. Nu kan man stryka alla nollor genom att stryka rad 2, 3 och 5 samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (-6, -7, -9, -5, -6)$ och $\beta = (-2, 1, 1, -1, 1)$. Nu fås lösningen $x_{11} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kostnad blir -33 (totalt värde 33).

Optimal duallösning är $\alpha = (-6, -7, -9, -5, -6)$ och $\beta = (-2, 1, 1, -1, 1)$. Summering av duallösningen ger -33, så starka dualsatsen är uppfylld.

3b: Reducerad kostnad för position (1,5) är $\hat{c}_{15} = c_{15} - \alpha_1 - \beta_5$, vilket för optimal duallösning blir $\hat{c}_{15} = c_{15} + 5$, så för att få $\hat{c}_{15} < 0$ krävs $c_{15} < -5$, dvs. man behöver mer än en poäng till. (Detta kan också ses genom att $\hat{c}_{15} = 1$ i optimala matrisen.)

Uppgift 4

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0$ och $z = 10$, vilket ger $\bar{z} = 10$ (eller $x_1 = 0$, $x_2 = 3.333$ och $z = 10$, vilket ger en annan lösningsgång).
Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 3$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 0.667$, $z = 10$. (Ingen förbättring av $\bar{z}$.)
Förgrena över x_2: P3 = P2 + ($x_2 \leq 0$), P4 = P2 + ($x_2 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 8$, heltalig lösning, vilket ger $\underline{z} = 8$.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 1.75$, $x_2 = 1$, $z = 10$. (Ingen förbättring av $\bar{z}$.)
Förgrena över x_1: P5 = P4 + ($x_1 \leq 1$), P6 = P4 + ($x_1 \geq 2$).
P5: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $z = 10$, heltalig lösning, vilket ger $\underline{z} = 10$.
Eftersom $\underline{z} = \bar{z}$ kan P6 kapas.
Detsamma gäller för P2.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, med $z = 10$.
Svar i ord: Köp en kamera av typ 1 och två av typ 2, vilket ger nyttan 10.
(Målfunktionen är parallell med bivillkoret, vilket gör problemet mer svårlöst.)

Uppgift 5

5a: Använd Dijkstras metod. Billigaste väg-sökning från nod 1 till nod 7 ger vägen 1-2-5-7 med kostnad 27.

5b: Nysta upp från nod 6 istället: Väg: 1-3-6, kostnad 18.

2c: $y_4 = 13$, $y_7 = 27$, så c_{47} behöver vara mindre än $y_7 - y_4 = 14$.

Uppgift 6

6a: Man kan direkt matcha 8 och 10 samt 3 och 4. Omatchade noder är nu 9 och 5. Försök att finna en utökande väg mellan dessa visar att ingen finns, vilket bevisar att bättre matchning inte finns.

6b: Undre gräns: 3, ty klick med tre noder finns. Övre gräns 3 från tillåten lösning, funnen med heuristik.

6c: Undre gräns: 5, ty nod med vales 5 finns. Övre gräns 5 från tillåten lösning, funnen med heuristik.

Uppgift 7

7a: LP-dualen blir

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & v = & 20y_1 & + & 20y_2 & + & 20y_3 & & & \\
\text{då} & & 10y_1 & & & & & \leq & 5 & (1) \\
& & & & 10y_2 & & & \leq & 4 & (2) \\
& & 2y_1 & + & 2y_2 & + & 10y_3 & \leq & 3 & (3) \\
& & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Inför slackvariabler y_4, y_5 och y_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	v	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\hat{b}$
v	1	-20	-20	-20	0	0	0	0
y_4	0	10	0	0	1	0	0	5
y_5	0	0	10	0	0	1	0	4
y_6	0	2	2	10	0	0	1	3

Först fås y_1 som inkommande variabel och y_4 som utgående.

Bas	v	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\hat{b}$
v	1	0	-20	-20	2	0	0	10
y_1	0	1	0	0	1/10	0	0	1/2
y_5	0	0	10	0	0	1	0	4
y_6	0	0	2	10	-1/5	0	1	2

Sedan fås y_2 som inkommande och y_5 som utgående.

Bas	v	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\hat{b}$
v	1	0	0	-20	2	2	0	18
y_1	0	1	0	0	1/10	0	0	1/2
y_2	0	0	1	0	0	1/10	0	2/5
y_6	0	0	0	10	-1/5	-1/5	1	6/5

Därefter fås y_3 som inkommande och y_6 som utgående.

Bas	v	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\hat{b}$
v	1	0	0	0	8/5	8/5	2	102/5
y_1	0	1	0	0	1/10	0	0	1/2
y_2	0	0	1	0	0	1/10	0	2/5
y_3	0	0	0	1	-1/50	-1/50	1/10	6/50

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $y_1 = 1/2 = 0.5$, $y_2 = 2/5 = 0.4$, $y_3 = 6/50 = 0.12$, med $v = 102/5 = 20.4$. Alla duala bivillkor är aktiva.

Primallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna. $x_1 = 8/5 = 1.6$, $x_2 = 8/5 = 1.6$, $x_3 = 2$, $z = 102/5 = 20.4$.

Svar i ord: Anlita 1.6 tecknare, 1.6 snickare och 2 målare, vilket ger kostnaden 20.4.

7b: Ny variabel x_4: reducerad kostnad $\hat{c}_4 = c_4 - a_4^T y = 4 - (4y_1 + 4y_2 + 4y_3) = 4 - 2 - 1.6 - 0.48 = 4 - 4.08 = -0.08 < 0$, så en sådan person skulle sänka kostnaden lite. (Här spelar det ingen roll hur vi fick fram lösningen i uppgift a.)

Uppgift 8

8a: Kinesiska brevbärarproblemet. Nod 2 och 5 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (2,4) och (4,5), så dessa bågar dubbleras. En rundtur blir då t.ex. 2-3-6-5-3-4-5-4-1-2-4-2, med kostnaden $72 + 15 = 87$.

8b: Optimallösningen förändras ej, ty optimeringen handlar bara om andra gången man går i en båge, och alla sådana kostnader divideras med tre. Totaltiden blir dock $72 + 15/3 = 77$.

8c: Den optimala rundturen är inte unik. En lika bra tur som startar i nod 2 är 2-4-3-2-

1-4-5-6-3-5-4-2, där båge (3,4) tas så tidigt som möjligt, Om man får starta i valfri nod kan man givtvis börja med den önskade bågen, t.ex. med turen 4-3-2-1-4-5-6-3-5-4-2-4.

Uppgift 9

Finn maxflöde från nod 7 till nod 1. Minsnittet ger då det snitt mellan nod 7 och 1 som har minimal"kapacitet", dvs. kräver minsta antal stenlejon.

Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 7-3-1, med kapacitet 8. Skicka 8 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (3,1) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 7-6-1, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (6,1) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 7-2-1, med kapacitet 6. Skicka 6 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2,1) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 7-3-4-1, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (7,3) blir full.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka/nå nod 7, 2 och 6, men inga andra, så minsnittet går mellan dessa noder och de andra, dvs. över bågarna (2,1), (7,3) och (6,1). Placera alltså stenlejon där. Det går åt 23 stenlejon.