| | |
|---|---|
| Tekniska Högskolan i Linköping | TAOP33 |
| Matematiska Institutionen | Lösning till tentamen |
| Optimeringslära | 2019-10-21 |
| Kaj Holmberg | |

# Lösningar

## Uppgift 1

**1a:** Inför slackvariabler $x_5$, $x_6$ och $x_7$. Starta med slackvariablerna i basen.

| Bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\hat{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | -5 | -4 | -4 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| $x_6$ | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 8 |
| $x_7$ | 0 | 2 | 0 | 4 | 2 | 0 | 0 | 1 | 8 |

Först fås $x_1$ som inkommande variabel och $x_7$ som utgående.

| Bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\hat{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 0 | -4 | 6 | 1 | 0 | 0 | 5/2 | 20 |
| $x_5$ | 0 | 0 | 2 | -2 | -1 | 1 | 0 | -1/2 | 6 |
| $x_6$ | 0 | 0 | 2 | -2 | 1 | 0 | 1 | -1/2 | 4 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 4 |

Sedan fås $x_2$ som inkommande variabel och $x_6$ som utgående.

| Bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\hat{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | 2 | 3/2 | 28 |
| $x_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | 1 | -1 | 0 | 2 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | -1 | 1/2 | 0 | 1/2 | -1/4 | 2 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 4 |

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, (samt $x_5 = 2$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$) med $z = 28$. Bivillkor 2 och 3 är aktiva, så det blir inga gröna eller gula över. Det blir dock 20 röda över (ty $x_5 = 2$). Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1.5$, $v = 28$.
Svar i ord: Gör 4 påsar av sort 1 och 2 påsar av sort 2.

**1b:** Skuggpriser fås av duallösningen, och $y_2 = 2$ är störst, så man tjänar mest på att öka högerledet till bivillkor 2, dvs. köpa fler gröna.

**1c:** Ny variabel $x_8$. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = c_8 - (1.5y_1 + 1.5y_2 + 1.0y_3) = c_8 - 4.5 > 0$ om $c_8 > 4.5$. Vinsten behöver vara större än 4.5. Eftersom $y_1 = 0$ spelar värdet på $a_{81}$ ingen roll.

**1d:** Dualt bivillkor: $1.5y_1 + 1.5y_2 + 1.0y_3 \geq c_8$. Sätt in $y = (0, 2, 1.5)$, vilket ger $4.5 \geq c_8$. Så duallösningen är tillåten om $c_8 \leq 4.5$. Eftersom vi vill ha $x_8$ som inkommande variabel, ska primala lösningen inte vara optimal, dvs. duala lösningen ska inte vara tillåten, så vi kräver $c_8 > 4.5$.

## Uppgift 2

**2a:** Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 8$, $p_2 = 1$, $y_3 = 5$, $p_3 = 1$, $y_4 = 8$, $p_4 = 1$, $y_5 = 11$, $p_5 = 3$, $y_6 = 10$, $p_6 = 3$, $y_7 = 15$, $p_7 = 2$, $y_8 = 15$, $p_8 = 6$, $y_9 = 16$, $p_7 = 5$, Uppnystning ger vägen 1 - 3 - 5 - 9, med kostnad 16.

**2b:** Använd nodmärkningarna i uppgift a. Uppnystning från nod 8 ger vägen 1 - 3 - 6 - 8, med kostnad 15.

## Uppgift 3

Finn maxflöde från nod 1 till nod 4. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-5-6-7-4, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1, 5), (5, 6) och (6, 7) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-2-3-4, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2, 3) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-2-6-3-7-4, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (2, 6) och (7, 5) blir fulla.)

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka/nå noderna 1 och 2, så minsnittet går mellan dessa noder och de andra, dvs. över bågarna (1, 5), (2, 3), (2, 6) och (5, 2) baklänges. Maxflödet är 9.

Öka kapciteten på båge (1, 5), (2, 3) eller (2, 6), eftersom de ingår i minsnittet.

(Det finns ett annat minsnitt: (5, 6), (2, 3), (2, 6), så att öka bara $u_{15}$, eller bara $u_{56}$, hjälper inte. Maxflödet ökar inte. Dock ger ökning av $u_{23}$ eller $u_{26}$ ökning av maxflödet.)

## Uppgift 4

**4a:** P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 0$, $x_2 = 20/9 \approx 2.22$ och $z = 100/9 \approx 11.1$, vilket ger $\bar{z} = 11$.
Förgrena över $x_2$: P1 = P0 + ($x_2 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 3$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2/7$, $x_2 = 2$, $z = 76/7 \approx 10.86$, vilket ger $\bar{z} = 10$.
Förgrena över $x_1$: P3 = P1 + ($x_1 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $z = 10$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 10$. Kapa.
P4: Kapa, ty $\bar{z} = 10$ och $\underline{z} = 10$.
P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.
Trädet avsökt. Svar: Installera 2 apparater av sort 2. Målfunktionsvärde 10.

**4b:** Finn vilken bättre heltalspunkt som först blir tillåten när högerledet ökas, dvs. bivillkoren parallellflyttas utåt. Numeriskt kan man kolla relevanta punker på följande sätt: Punkt (0, 2), $z = 10$, vänsterled=18, gamla optimum.
Punkt (3, 0), $z = 9$, vänsterled=21, sämre.
Punkt (2, 1), $z = 11$, vänsterled=23, bättre.
Punkt (1, 2), $z = 13$, vänsterled=25, bättre.
Punkt (0, 3), $z = 15$, vänsterled=27, bättre.
Slutsats: Första bättre punkten är (2, 1) blir tillåten vid högerledet/budgeten 23.

## Uppgift 5

**5a:** Inför ny nod 7, sänka av styrka 1, samt bågar (4,7) och (5,7), båda med kostnad noll. (I startlösningen är $x_{57} = 1$.)

**5b:** Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (2, 1), (4, 3), (5, 3), (5, 6) och (6, 2) (samt (5,7)). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, $y_3 = -7$, $y_4 = -11$, $y_5 = -12$, $y_6 = -8$, (och $y_7 = -12$) och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{31} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{32} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{63} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), (samt $\hat{c}_{47} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$)). Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

**5c:** Nya reducerade kostnader: $\hat{c}_{54} = 2 + y_5 - y_4 = 1 > 0$, fortfarande optimalt.
$\hat{c}_{32} = 2 + y_3 - y_2 = -1 < 0$, ej optimalt. Öka.
Alltså välj $x_{32}$ som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 3-2-6-5-3, och maximal ändring blir 3, pga. båge (6,2), som blir utgående.

Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, $y_3 = -6$, $y_4 = -10$, $y_5 = -11$, $y_6 = -7$, (och $y_7 = -11$) och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{62} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{31} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{63} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), (samt $\hat{c}_{57} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$)). Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

## Uppgift 6

**6a:** Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1 och 6 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (1, 3) och (3, 6), så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 9. En rundtur blir då t.ex. 1-8-6-3-1-3-6-5-3-4-5-7-4-2-1, med kostnaden $63 + 9 = 72$.

**6b:** Lösningen förändras inte alls. Det enda som händer är att extrakostnaden 9 bara blir 4.5, så totalkostnaden blir $63 + 4.5 = 67.5$.

## Uppgift 7

Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 36, vilket är en undre gräns. Närmaste granne med start i nod 1 ger turen 1-8-6-7-5-3-4-2-1 med kostnad 41. Vi får övre gräns 41 och undre gräns 36, så vår lösning kan vara 5 enheter sämre än optimum, men inte mer.

I 1-trädet har nod 4 valens 3, så ett bivillkor som specificerar att nod 4 ska ha valens 2 skär bort den relaxerade lösningen men inte någon tillåten lösning: $x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{46} = 2$.

## Uppgift 8

**8a:** Efter första steget fås $\alpha = (5, 6, 7, 4, 5)$ och $\beta = (0, 1, 0, 2, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 samt kolumn 1, 2 och 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (6, 7, 7, 5, 6)$ och $\beta = (-1, 0, -1, 2, 1)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{11} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{42} = 1$, $x_{53} = 1$, och total kostnad blir 32. Optimal duallösning är ovanstående $\alpha$ och $\beta$. Summering av duallösningen ger 32, så starka dualsatsen är uppfylld.

**8b:** Om alla kostnader i kolumn 4 ökar med 3, kan en optimal dual lösning fås genom att öka $\beta_4$ med 3. För övrigt är resten av duallösningen oförändrad. Eftersom precis samma reducerade kostnader fås, ändras inte den primala lösningen. (Man kan också motivera detta med att alla tillåtna lösningar blir precis 3 dyrare.)

## Uppgift 9

**9a:** Maximal matching, sök utökande (alternerande) väg. Först kan (8,10) matchas. Därefter finner man den utökande vägen 2-1-9-7-6-4. Byte av matchningen längs den ger en maximal matching där alla är med, (1,2), (3,5), (4,6), (7,9) och (8,10).

**9b:** Då blir matchningen tudelad, dvs. ett tillordningsproblem, och ungerska metoden kan användas.

**9c:** Nodfärgning. Grafen innehåller en klick med tre noder, så minst tre färger behövs. Det är ganska enkelt att hitta en nodfärgning med tre färger, så det optimala är tre färger.

**9d:** Bågfärgning. Maximal nodvalens i grafen är fem, så minst fem färger behövs. Det är enkelt att hitta en bågfärgning med fem färger, så det optimala är fem färger.