Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP33
Lösning till tentamen
2020-01-07

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-5	-2	-3	0	0	0	0
x_5	0	10	10	10	10	1	0	0	120
x_6	0	0	15	15	10	0	1	0	90
x_7	0	20	0	20	0	0	0	1	80

Först fås x_2 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	0	3	1/3	0	1/3	0	30
x_5	0	10	0	0	10/3	1	-2/3	0	60
x_2	0	0	1	1	2/3	0	1/15	0	6
x_7	0	20	0	20	0	0	0	1	80

Därefter fås x_1 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	0	7	1/3	0	1/3	1/5	46
x_5	0	0	0	-10	10/3	1	-2/3	-1/2	20
x_2	0	0	1	1	2/3	0	1/15	0	6
x_1	0	1	0	1	0	0	0	1/20	4

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, (samt $x_5 = 20$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$) med $z = 46$. Bivillkor 2 och 3 är aktiva, så det blir inga svarta eller vita över, men det blir 20 000 blå över (ty $x_5 = 20$). Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 0$, $y_2 = 1/3$, $y_3 = 1/5$, $v = 46$. Svar i ord: Gör 4000 påsar av sort 1 och 6000 påsar av sort 2.

1b: Skuggpriser fås av duallösningen, så $y_1 = 0$ är minst och $y_2 = 1/3$ är störst, så man förlorar minst (inget) på att minska högerledet till bivillkor 1, dvs. ge bort blå. (Man skulle förlora mest på att ge bort svarta.)

1c: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = c_8 - (20y_2 + 20y_3) = c_8 - (20/3 + 20/5) = c_8 - (20/3 + 4) = c_8 - (20/3 + 12/3) = c_8 - 32/3 > 0$ om $c_8 > 32/3 \approx 10.667$. Vinsten behöver vara större än 10.667.

1d: Dualt bivillkor: $20y_2 + 20y_3 \geq c_8$. Sätt in $y = (0, 1/3, 1/5)$, vilket ger $32/3 \geq c_8$. Duallösningen är alltså tillåten om $c_8 \leq 32/3$. Eftersom vi vill ha x_8 som inkommande variabel, ska primala lösningen inte vara optimal, dvs. duala lösningen ska inte vara tillåten, så vi kräver $c_8 > 32/3$.

Uppgift 2

2a: Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 4$, $p_2 = 1$, $y_3 = 14$, $p_3 = 1$, $y_4 = 12$, $p_4 = 2$, $y_5 = 20$, $p_5 = 4$, $y_6 = 21$, $p_6 = 3$, $y_7 = 29$, $p_7 = 5$, $y_8 = 28$, $p_8 = 6$. Uppnystning ger vägen 1 - 2 - 4 - 5 - 7 med restid 29.

2b: Se nodpriser y i uppgift a. Nod 2 nås efter 4 timmar, nod 4 nås efter 12 timmar, nod 5 nås efter 20 timmar, nod 7 nås efter 29 timmar.

2c: Billigaste väg till nod 8 blir (enligt uppgift a) 1 - 3 - 6 - 8, med kostnad 28. Kostnad för Gel blir då $28 + 2 = 30 > 29$, så detta lönar sig inte för Gel.

Uppgift 3

3a: Finn maxflöde från nod 1 till nod 7. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-3-6-7, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1, 3) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-2-4-6-7, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (2, 4) och (6, 7) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-2-3-5-7, med kapacitet 1. Skicka 1 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1, 2) blir full.)

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka nod 1, så minsnittet går mellan nod 1 och de andra, dvs. över bågarna (1, 2) och (1, 3). Maxflödet är 10.

3b: Nej, det skulle inte påverka minsnittet, och därför inte maxflödet.

Uppgift 4

4a: P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 0$, $x_2 = 1.5$ och $z = 10.5$, vilket ger $\bar{z} = 10$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 1$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 2$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2/3$, $x_2 = 1$, $z = 31/3 \approx 10.33$, vilket ger $\bar{z} = 10$.
Förgrena över x_1: P3 = P1 + ($x_1 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $z = 7$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 7$. Kapa.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 3/4$, $z = 41/4 = 10.25$, vilket ger $\bar{z} = 10$.
Förgrena över x_2: P5 = P4 + ($x_2 \leq 0$), P6 = P4 + ($x_2 \geq 1$).
P5: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 10$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 10$. Kapa.
P6: Kapa, ty $\bar{z} = 10$ och $\underline{z} = 10$. (Försök inte ens lösa.)
P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.
Trädet avsökt. Svar: Köp 2 maskiner av sort 1. Målfunktionsvärde 10.

4b: Ökning av budgeten innbär parallellförflyttning av bivillkoret. Om man gör det upptäcker man att den första bättre punkten som blir tillåten är (1,1), och detta sker då $b = 14$.

Uppgift 5

5a: Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,2), (2,3), (3,5), (3,6) och (4,5). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 16$, $y_4 = 17$, $y_5 = 25$, $y_6 = 23$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{24} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{46} = -1 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$). Vi väljer x_{46} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 4-6-3-5-4, och maximal ändring blir 1, pga. båge (3,5) och (4,5). Vi väljer (3,5) som utgående.

Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 16$, $y_4 = 18$, $y_5 = 26$, $y_6 = 23$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{24} = -6 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

5b: Inför ny nod 7, sänka av styrka 3, samt bågar (1,7) och (2,7), båda med kostnad noll. Öka källstyrkan i nod 1 med 3. I startlösningen sätts $x_{17} = 3$. Det betyder att vi slänger de 3 extra enheterna, dvs. har samma lösning som innan. Man skulle dock kunna öka x_{27} i en cykel som delvis är 2-7-1, vilket betyder att x_{17} minskas.

Vi lägger till (1,7) som basbåge, vilket ger $y_7 = 0$. Ickebasbågen (2,7) får då reducerad kostnad $\hat{c}_{27} = 4 > 0$, vilket är optimalt, ty $x_{27} = 0$, så vi vill inte ändra flödet. Detta bevisar att det inte lönar sig att öka produktionen i nod 1.

Uppgift 6

Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 2, 3, 5 och 6 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (2, 3) och (5, 6), så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 15. En rundtur blir då t.ex. 1-2-3-2-4-5-6-5-3-6-4-3-1. med kostnaden $71 + 15 = 86$.

Uppgift 7

7a: Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 44, vilket är en undre gräns. Det billigaste 1-trädet kan också vara en Hamiltoncykel, dvs. en tillåten lösning till handelseresandeproblemet. (Om man inte fick rätt 1-träd kan man flytta bågar utan att totalkostnaden höjs för att få en cykel.) En tillåten lösning är 1-2-7-4-5-6-8-3-1, med kostnad 44. Vi får övre gräns 44 och undre gräns 44, så vår lösning är optimal.

7b: Om 1-trädet blir en Hamiltoncykel finns naturligtvis inget bivillkor som skär bort denna lösning. Annars kan man t.ex. få valens tre för nod 7, och i så fall blir bivillkoret $x_{27} + x_{47} + x_{57} \leq 2$, eftersom ingen nod får ha valens större än 2.

Uppgift 8

8a: Efter första steget fås $\alpha = (15, 6, 27, 4, 15)$ och $\beta = (0, 0, 0, 2, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 4 samt kolumn 1 och 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (16, 7, 27, 4, 16)$ och $\beta = (-1, 0, -1, 2, 1)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{13} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{52} = 1$, och total kostnad blir 71. Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 71, så starka dualsatsen är uppfylld.

8b: Om alla kostnader i rad 3 ökar med 5, kan en optimal dual lösning fås genom att öka α_3 med 5. För övrigt är resten av duallösningen oförändrad. Eftersom precis samma reducerade kostnader fås, ändras inte den primala lösningen. (Man kan också motivera detta med att alla tillåtna lösningar blir precis 5 dyrare.)

Uppgift 9

9a: Maximal matching. Försök först addera bågar till matchningen utan att ändra de matchade bågarna. Då kan (4,6) matchas, men sedan kan inte fler läggas till. Därefter finner man en utökande väg, t.ex. 14-2-7-9, och byter matchning längs den, (2,14) och (7,9) in, (2,7) ut. Nu finns ingen utökande väg, så matchningen är maximal. Vi har 6 par. Noderna 10, 11 och 13 är inte matchade, så alla personer kommer inte med i par.

9b: Nodfärgning. Grafen innehåller klickar med fyra noder, så minst fyra färger behövs. Det är ganska enkelt att hitta en nodfärgning med fyra färger, så det optimala är fyra färger.

9c: Maximal nodvalens i grafen är sex (nod 4), så minst sex färger behövs. Det är enkelt att hitta en bågfärgning med sex färger, så det optimala är sex färger.