Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP33
Lösning till tentamen
2020-08-28

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-2	-3	-2	0	0	0	0
x_5	0	1	1	1	1	1	0	0	100
x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	20
x_7	0	0	1	1	-1	0	0	1	30

Först fås x_1 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	2	-7	-2	0	4	0	80
x_5	0	0	0	2	1	1	-1	0	80
x_1	0	1	1	-1	0	0	1	0	20
x_7	0	0	1	1	-1	0	0	1	30

Därefter fås x_3 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	9	0	-9	0	4	7	290
x_5	0	0	-2	0	3	1	-1	-2	20
x_1	0	1	2	0	-1	0	1	1	50
x_3	0	0	1	1	-1	0	0	1	30

Nu blir x_4 inkommande variabel och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	3	0	0	3	1	1	350
x_4	0	0	-2/3	0	1	1/3	-1/3	-2/3	$20/3 \approx 6.667$
x_1	0	1	4/3	0	0	1/3	2/3	1/3	$170/3 \approx 56.667$
x_3	0	0	1/3	1	0	1/3	-1/3	1/3	$110/3 \approx 36.667$

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 56.667$, $x_2 = 0$, $x_3 = 36.667$, $x_4 = 6.667$, (samt $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$) med $z = 350$. Optimallösningen är unik, eftersom ingen icke-basvariabel har reducerad kostnad noll.

Alla bivillkor är aktiva. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 3$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$, $v = 350$. Skuggpriserna är desamma som duallösningen, och anger hur mycket målfunktionsvärdet skulle öka om motsvarande högerled ökar med en enhet. (Eftersom y_1 är störst, skulle man tjäna mest på att öka högerledet i bivillkor 1, dvs totalsumman.)

Svar i ord: Satsa 56.67 mkr på bidrag 1: Möjlighet att skjuta upp betalning av skatt och avgifter, inget på bidrag 2: Slopat krav på läkarintyg under de första 14 sjukdagarna, 36.67 mkr på bidrag 3: Stöd vid minskad omsättning, och 6.67 mkr på bidrag 4: Slopad karens.

1b: Båda bivillkoren har samma skuggpris, så de verkar lika bra.

1c: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = 2 - (y_1 + y_2 - y_3) = 2 - (3 + 1 - 1) = -1 < 0$. Nej, avdela inga pengar till den bidragstypen.

1d: Dualt bivillkor: $y_1 + y_2 - y_3 \geq 2$. Sätt in $y = (3, 1, 1)$, vilket ger $3 \geq 2$, vilket är uppfyllt, så optimallösningen är oförändrad.

Uppgift 2

2a: Inför en dummysänka, nod 7, av styrka 2 (som är total källstyrka 7 minus total sänkstyrka 5), och bågar (1,7), (2,7) och (4,7) med kostnad noll. I den givna startlösningen är $x_{17} = 2$, $x_{27} = 0$ och $x_{47} = 0$.

Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,7), (2,6), (4,6), (6,3), (6,5), samt t.ex. (1,2).

Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 20$, $y_4 = 5$, $y_5 = 16$, $y_6 = 11$, $y_7 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{16} = -2 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{27} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{47} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Lösningen ej optimal. Öka x_{16}. Cykeln blir 1-6-2-1, och maximal ändring blir 0, pga. båge (1,2), så vi väljer (1,2) som utgående.

Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 18$, $y_4 = 3$, $y_5 = 14$, $y_6 = 9$, $y_7 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{27} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{47} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal. Vi har inte ändrat något flöde, så flödet var optimalt från början.

2b: För den nya bågen fås $\hat{c}_{15} = 10 + 0 - 14 = -4 < 0$, inte optimalt ty $x = 0$. Vi väljer x_{15} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 1-5-6-1, och maximal ändring blir 0, pga. båge (1,6), så vi väljer (1,6) som utgående.

Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $y_3 = 14$, $y_4 = -1$, $y_5 = 10$, $y_6 = 5$, $y_7 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{16} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{27} = -1 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{47} = -1 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$).

Vi väljer x_{27} som inkommande, att öka. Cykeln blir 2-7-1-5-6-2, och ändringen blir 1, bl.a. pga. båge (1,5), som vi väljer som utgående.

Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 15$, $y_4 = 0$, $y_5 = 11$, $y_6 = 6$, $y_7 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{15} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{16} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = -5 < 0$

(optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{47} = 0$ (optimalt). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

Ändring i totalkostnad: Första iterationen gjorde flödesändring noll, vilket ger kostnadsändring noll. I andra iterationen gjordes flödesändringen 1, och eftersom reducerad kostnad för inkommande variabel var -1, och flödet ökades, så blir kostnadsändringen -1. Totalkostnaden minskades alltså med 1.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 5 (i nätverket utan nod 7 och utan båge (6,3)). (Jag har inte med båge (1,5), men man kan ha det om man vill.) Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-6-5, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (2,6) och (6,5) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-6-2-5, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2,5) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-4-3-5, med kapacitet 1. Skicka 1 enhet och ändra tillåtna riktningar. (Båge (4,3) blir full.) Har vi kvar båge (1,5), får vi den som väg, med kapacitet 1. Skicka en enhet. Bågen blir full.

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka noderna 1, 2, 4 och 6, så minsnittet går över bågarna (2,5), (6,5) och (4,3). Det betyder att om man vill öka maxflödet, måste kapaciteten på någon av dessa bågar ökas. Maxflödet är 7.

Uppgift 3

3a: Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 1$, $p_2 = 1$, $y_3 = 4$, $p_3 = 2$, $y_4 = 3$, $p_4 = 1$, $y_5 = 6$, $p_5 = 3$, $y_6 = 9$, $p_6 = 3$, $y_7 = 10$, $p_7 = 6$. Uppnystning ger vägen 1 - 2 - 3 - 6 - 7 med smittorisk 10.

3b: Varje nod delas upp i två, med alla inbågar till den första och alla utbågar från den andra. På bågen mellan dem sätts kostnaden lika med smittorisken i noden. (Man kan även, lite informellt, öka nodpriserna i varje nod med smittorisken i noden. Formellt har man då inte längre ett billigaste väg-problem, men metoden fungerar.)

Vi får $y_1 = 2$, $p_1 = -$, $y_2 = 5$, $p_2 = 1$, $y_3 = 10$, $p_3 = 2$, $y_4 = 7$, $p_4 = 1$, $y_5 = 15$, $p_5 = 3$, $y_6 = 17$, $p_6 = 4$, $y_7 = 21$, $p_7 = 6$. Uppnystning ger vägen 1 - 4 - 6 - 7 med smittorisk 21.

Uppgift 4

4a: Matchningsproblemet. Nod 1 och 7 omatchade. Utökande väg: 1-14-13-4-3-11-8-6-5-10-9-7. Alternera matchningen. Matchningen ökar med ett. Nu är alla noder matchade. Maximal matchning: 1-14, 4-13, 3-11, 6-8, 5-10, 7-9 och 2-12.

4b: Grafen innehåller en klick av storlek 4, så minst 4 färger krävs. Det finns en nodfärgning med 4 färger, som kan hittas med heuristik, så övre och undre gräns är 4.

4c: Grafens maxvalens är 7 (se nod 4), så minst 7 färger krävs. Det finns en bågfärgning med 7 färger, som kan hittas med heuristik, så övre och undre gräns är 7.

Uppgift 5

5a: Variabeldefinition: $x_j = 1$ om kurs j ges på Campus.
Modell: max $\sum_j c_j x_j$ då $\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$ för alla i, j, $x_j \in \{0,1\}$ för alla j.

5b: Modell:
max $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4$ då $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5$, $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 3$ och $x_j \in \{0,1\}$ för alla j.

Tillåten lösning $(1,0,0,0)$ ger undre gräns $\underline{z} = 2$. Målfunktionsbivillkoret blir då $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 3$.

Den första fixeringen är $x_2 = 0$ pga bivillkor 2. Därefter fås inga fler fixeringar. Förgrena över x_1. Gå ner i 1-grenen först: Bivillkor 2 ger fixeringarna $x_3 = 0$ och $x_4 = 0$. Nu är alla variablerna fixerad, men målfunktionsbivillkoret är inte uppfyllt, så grenen kapas.

Vi går ner i andra grenen, där $x_2 = 0$ och $x_1 = 0$. Målfunktionsbivillkoret ger då $x_3 = 1$. Bivillkor 2 ger då $x_4 = 0$. Nu är alla variablerna fixerad, och kontroll visar att alla bivillkor är uppfyllda. Vi har fått en bättre tillåten lösning $(0,0,1,0)$ med $z = 4$. Kapa grenen.

Trädet är nu avsökt. Vår bästa lösning är att bara ge kurs 3 på Campus.

5c: LP-problemet löses med algoritmen för kontinuerligt kappsäcksproblem, baserad på kvoterna c_j/a_j (störst är bäst). Kvoterna blir: x_1: $2/3 \approx 0.667$, x_2: $3/4 = 0.75$, x_3: $4/3 \approx 1.333$, x_4: $2/3 \approx 0.667$, så x_3 är bäst, följt av x_2, med x_1 och x_4 lika på sista plats.

P0: LP-lösningen blir $x_3 = 1$ ger $\hat{b} = 4 - 3 = 1$, $x_2 = 1/4 = 0.25$, $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, med $z = 4.75$, vilket ger $\bar{z} = 4$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 0$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 1$).

P2: LP-lösning: $x_2 = 1$, ger $\hat{b} = 4 - 4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, med $z = 3$. Tillåten heltalslösning, vilket ger $\underline{z} = 3$.

P1: $x_2 = 0$: LP-lösningen blir $x_3 = 1$ ger $\hat{b} = 4 - 3 = 1$, $x_1 = 1/3$, $x_4 = 0$, med $z = 4.67$, vilket ger $\bar{z} = 4$.
Förgrena över x_1: P3 = P1 + ($x_1 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 1$).

P4: $x_2 = 0$, $x_1 = 1$, ger $\hat{b} = 4 - 3 = 1$: LP-lösningen blir $x_3 = 1/4 = 0.25$, $x_4 = 0$, med $z = 3$, vilket ger $\bar{z} = 3$. Vi har nu $\bar{z} = \underline{z}$, så grenen kapas.

P3: $x_2 = 0$, $x_1 = 0$: LP-lösningen blir $x_3 = 1$ ger $\hat{b} = 4 - 3 = 1$, $x_4 = 1/3$, med $z = 4.67$, vilket ger $\bar{z} = 4$.
Förgrena över x_4: P5 = P3 + ($x_4 \leq 0$), P6 = P3 + ($x_4 \geq 1$).

P6: $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, ger $\hat{b} = 4 - 3 = 1$: LP-lösning: $x_3 = 1/4 = 0.25$, med $z = 3$, vilket ger $\bar{z} = 3$. Vi har nu $\bar{z} = \underline{z}$, så grenen kapas.

P5: $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_4 = 0$: LP-lösningen blir $x_3 = 1$ ger $\hat{b} = 4 - 3 = 1$, med $z = 4$, Tillåten heltalslösning, vilket ger $\underline{z} = 4$. Kapa grenen.

Trädet avsökt. Bästa lösning är $x = (0, 0, 1, 0)$, med $z = 4$.
Svar: Ge bara kurs 3 på campus.

Uppgift 6

6a: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 2, 3, 5 och 8 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (2, 4), (4, 8), (3, 6) och (5, 6), till en kostnad av 26, så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 26/4=6.5. En rundtur blir då t.ex. 1-2-7-8-4-2-4-8-9-5-6-3-6-5-4-3-1, med kostnaden $98 + 6.5 = 104.5$. Korsningarna 7 och 9 passeras en gång, korsningarna 2, 3, 5, 6, 8 passeras två gånger, korsningen 4 passeras tre gånger, korsning 1 passeras ingen gång, förutom start och slut.

6b: Kostnaden blir $2 * 98 = 196$, ty alla noder får jämn valens.

Uppgift 7

7a: Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 48, vilket är en undre gräns. Med heuristik kan man få turen 1-2-8-7-9-5-6-3-10-4-1, med kostnad 50. Vi får övre gräns 50 och undre gräns 48, så vår lösning är högst 2 enheter för dyr.

7b: Nod 3 har för hög valens i 1-trädet, så vi kan lägga till bivillkoret
$x_{23} + x_{34} + x_{36} + x_{38} + x_{3,10} \leq 2$.

Uppgift 8

8a: Efter första steget fås $\alpha = (4, 6, 7, 4, 5)$ och $\beta = (0, 0, 0, 0, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 5 samt kolumn 1 och 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 7, 7, 5, 5)$ och $\beta = (-1, 0, -1, 0, 1)$. Nu fås lösningen $x_{14} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kostnad blir 28. Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 28, så starka dualsatsen är uppfylld.

8b: Primala optimallösningen förändras ej. Duala optimallösningen förändras enbart med att β_1 ökas med 10 (från -1 till 9.).

8c: Problemet är alltså att minimera den maximala kostnaden för en allokering, $\min_x \max_{ij} c_{ij}x_{ij}$ då x är en tillordning. Man kan lösa problemet genom att söka i målfunktionsvärdet, som följer. Gissa på ett optimalvärde $\bar{v}$, och försök finna en tillåten lösning med bara celler som har $c_{ij} \leq \bar{v}$. Det kan göras genom att ta bort alla bågar med $c_{ij} > \bar{v}$ och försöka finna en perfekt matchning i den återstående tudelade grafen. Kan man hitta en, har man en tillåten lösning, och kan försöka hitta en bättre genom att sänka $\bar{v}$. Kan man inte hitta en, kan man höja $\bar{v}$, och försöka igen. Bara värden större eller lika med den minsta kostnaden i någon rad och större eller lika med den minsta kostnaden i någon kolumn i c behöver undersökas. Metoden blir pseudopolynomisk.

I exemplet ser vi att $\bar{v} < 7$ skulle göra att person 3 inte kan göra något, medan det faktiskt är lätt att hitta en matchning för $\bar{v} = 7$.