Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP33
Lösning till tentamen
2020-10-24

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_4, x_5, x_6, x_7 och x_8. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	-4	-6	-3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	0	0	0	0	20
x_5	0	0	1	1	0	1	0	0	0	15
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	0	10
x_7	0	0	1	0	0	0	0	1	0	20
x_8	0	0	0	1	0	0	0	0	1	15

Först fås x_2 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	-4	0	3	0	6	0	0	0	90
x_4	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	5
x_2	0	0	1	1	0	1	0	0	0	15
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	0	10
x_7	0	0	0	-1	0	-1	0	1	0	5
x_8	0	0	0	1	0	0	0	0	1	15

Därefter fås x_1 som inkommande variabel och x_4 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	0	0	3	4	2	0	0	0	110
x_1	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	5
x_2	0	0	1	1	0	1	0	0	0	15
x_6	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	5
x_7	0	0	0	-1	0	-1	0	1	0	5
x_8	0	0	0	1	0	0	0	0	1	15

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 5$, $x_2 = 15$, $x_3 = 0$, (samt $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 5$, $x_7 = 5$ och $x_8 = 15$) med $z = 110$.

De två första bivillkoren är aktiva. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0$, $v = 110$.

Svar i ord: Skicka 5000 munskydd till Sverige och 15000 munskydd till Tyskland, men inga till Polen. Alla tillgängliga delar går åt, eftersom de två första bivillkoren är aktiva, men inget land får all efterfrågan tillgodosedd, eftersom de tre sista bivillkoren inte är aktiva. (Det betyder att vi hade kunnat lösa problemet utan de tre sista bivillkoren, men det visste vi ju inte i förväg.)

1b: Villkoren har skuggpris 4 och 2, så högerledet i första bivillkoret verkar bäst att öka.

1c: Ny variabel x_9. Reducerad kostnad: $\hat{c}_9 = c_9 - a_9^T y = c_9 - (y_1 + 2y_2) = c_9 - (4+4) = c_9 - 8 > 0$ om $c_9 > 8$. Svar: Vinsten ska vara större än 8.

1d: LP-dualen är standard, se kurslitteraturen. Dualt bivillkor: $y_1 + 2y_2 \geq c_9$. Sätt in $y = (4, 2, 0, 0, 0)$, vilket ger $8 \geq c_9$, så det duala bivillkoret är inte uppfyllt (och lösningen ändras) om $8 < c_9$, vilket är samma som i uppgift c.

Uppgift 2

2a: Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,3), (2,4), (3,6), (4,3) samt (5,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -8$, $y_3 = 3$, $y_4 = -4$, $y_5 = 3$, $y_6 = 8$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 13 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -4 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 0$ (optimalt). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

2b: Nu fås $\hat{c}_{25} = 11 + (-8) - 3 = 0$, fortfarande optimalt.

(Om man vill skulle man kunna välja x_{25} som inkommande variabel, att minska. Cykeln blir 5-2-4-3-6-5, och maximal ändring blir 1, pga. båge (5,6), så vi väljer (5,6) som utgående. Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -8$, $y_3 = 3$, $y_4 = -4$, $y_5 = 3$, $y_6 = 8$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 13 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{56} = 0$ (optimalt). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

Ändring i totalkostnad: Innan flödesändringen ökade kostnaden för båge (2,5) med $(11 - 7) * 4 = 16$. Vi gjorde flödesändringen -1, men eftersom reducerad kostnad för inkommande variabel var 0, så blir kostnadsändringen noll. Totalkostnaden minskades alltså inte av flödesändringen.)

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-3-5-6, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (3,5) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-2-4-3-6, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (3,6) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-4-5-6, med kapacitet 1. Skicka 1 enhet och ändra tillåtna riktningar. (Båge (5,6) blir full.)

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka noderna 1, 2, 3, 4 och 5, så minsnittet går över bågarna (3,6) och (5,6). Det betyder att om man vill öka maxflödet, måste kapaciteten på någon av dessa bågar ökas. Maxflödet är 10.

Uppgift 3

3a: P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 0$, $x_2 = 10/3 \approx 3.33$ och $z = 40/3 \approx 13.33$, vilket ger $\bar{z} = 13$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + $(x_2 \leq 3)$, P2 = P0 + $(x_2 \geq 4)$.
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2/5 = 0.4$, $x_2 = 3$, $z = 13.2$ vilket ger $\bar{z} = 13$.
Förgrena över x_1: P3 = P1 + $(x_1 \leq 0)$, P4 = P1 + $(x_1 \geq 1)$.
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $z = 12$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 12$. Kapa.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 2.5$, $z = 13$, vilket ger $\bar{z} = 13$.

Förgrena över x_2: P5 = P4 + ($x_2 \leq 2$), P6 = P4 + ($x_2 \geq 3$).
P5: Grafisk lösning: $x_1 = 1.6$, $x_2 = 2$, $z = 3 + 1.8 + 8 = 12.8$, vilket ger $\bar{z} = 12$. Kapa, ty $\bar{z} < \underline{z}$.
P6: Saknar tillåten lösning. Kapa.
P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.
Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Svar: Bygg ut tre moduler av sort 2. Målfunktionsvärde 12.

3b: Ökning av budgeten innebär parallellförflyttning av bivillkoret. Om man gör det grafiskt upptäcker man att den första bättre punkten som blir tillåten är (3,1) med $z = 13$, och detta sker då $b = 21$.

Uppgift 4

4a: Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 6$, $p_2 = 1$, $y_3 = 6$, $p_3 = 1$, $y_4 = 10$, $p_4 = 3$, $y_5 = 10$, $p_5 = 3$, $y_6 = 14$, $p_6 = 2$, $y_7 = 15$, $p_7 = 5$. Uppnystning ger vägen 1 - 3 - 5 - 7 med restid 15.

4b: Billigaste väg-problem med negativa kostnader. Använd Fords metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 1$, $p_2 = 3$, $y_3 = 3$, $p_3 = 1$, $y_4 = 3$, $p_4 = 5$, $y_5 = 5$, $p_5 = 3$, $y_6 = 6$, $p_6 = 2$, $y_7 = 5$, $p_7 = 5$. Uppnystning ger vägen 1 - 3 - 5 - 7 med kostnad 5.

4c: Ja, $y_6 = 14$, så det blir lite billigare att leverera dit.

Uppgift 5

5a: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1, 2, 3 och 6 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (1,6) och (2,3), till en kostnad av 14, så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 14. En rundtur blir då t.ex. 1-2-3-4-6-1-6-5-3-2-5-1, med kostnaden $63 + 14 = 77$.

5b: Optimallösningen ändras inte alls, men blir 7 billigare.

5c: Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 37, vilket är en undre gräns. Genom att byta en båge, (1,5) mot (1,2), fås en tillåten tur, med kostnad 39, vilket blir en övre gräns. Vi får övre gräns 39 och undre gräns 37, så vår lösning är högst 2 enheter för dyr.

Nod 5 har för hög valens i 1-trädet, så vi kan lägga till bivillkoret
$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{65} \leq 2$.

Uppgift 6

6a: Efter första steget fås $\alpha = (5, 4, 4, 5, 5)$ och $\beta = (30, 20, 9, 2, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 4 samt kolumn 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 5, 5, 5, 6)$ och $\beta = (30, 20, 9, 2, -1)$. Man kan nu stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 4 och 5 samt kolumn 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 6, 6, 5, 6)$ och $\beta = (30, 20, 9, 2, -2)$. Man kan nu stryka alla nollor genom att stryka rad 4 och 5 samt kolumn 1 och 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (6, 7, 7, 5, 6)$ och $\beta = (29, 20, 9, 2, -3)$. Nu fås lösningen $x_{11} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{42} = 1$, $x_{53} = 1$, och total kostnad blir 88. Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 88, så starka dualsatsen är uppfylld.

6b: Primala optimallösningen förändras ej. Duala optimallösningen förändras enbart med att α_5 ökas med 100 (från 6 till 106.).

Uppgift 7

7a: Matchningsproblemet. Nod 1, 3, 4 och 10 omatchade. Utökande väg: 1-2-9-10. Alternera matchningen. Matchningen ökar med ett. Nu är nod 1 och 10 också matchade. Utökande väg: 3-7-5-4. Alternera matchningen. Matchningen ökar med ett. Nu är alla noder matchade. Par: (1,2), (3,7), (4,5), (6,8), (9,10). Ett av de önskade paren kvarstår.

7b: Nodfärgning. Grafen innehåller en klick av storlek 3, så minst 3 färger krävs. Det finns en nodfärgning med 3 färger som kan hittas med heuristik, så övre och undre gräns är 3.

7c: Bågfärgning. Grafens maxvalens är 6 (se nod 7), så minst 6 färger krävs. Det finns en bågfärgning med 6 färger som kan hittas med heuristik, så övre och undre gräns är 6.