Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP33
Lösning till tentamen
2021-01-04

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 och x_{10}. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$\hat{b}$
z	1	-1	-3	-2	-1	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	4	3	5	6	1	0	0	0	0	0	50
x_6	0	2	2	4	5	0	1	0	0	0	0	40
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	20
x_8	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	10
x_9	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	50
x_{10}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	100

Först fås x_2 som inkommande variabel och x_8 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$\hat{b}$
z	1	-1	0	-2	-1	0	0	0	3	0	0	30
x_5	0	4	0	5	6	1	0	0	-3	0	0	20
x_6	0	2	0	4	5	0	1	0	-2	0	0	20
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	20
x_2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	10
x_9	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	50
x_{10}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	100

Därefter fås x_3 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$\hat{b}$
z	1	3/5	0	0	7/5	2/5	0	0	9/5	0	0	38
x_3	0	4/5	0	1	6/5	1/5	0	0	-3/5	0	0	4
x_6	0	-6/5	0	0	1/5	-4/5	1	0	2/5	0	0	4
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	20
x_2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	10
x_9	0	-4/5	0	0	-6/5	-1/5	0	0	3/5	1	0	46
x_{10}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	100

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$, (samt $x_5 = 0$, $x_6 = 4$, $x_7 = 20$, $x_8 = 0$, $x_9 = 46$ och $x_{10} = 100$) med $z = 38$.

Det första och det fjärde bivillkoret är aktiva, eftersom slackvariablerna inte är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 2/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 9/5$, $y_5 = 0$, $y_6 = 0$, $v = 38$.

Svar i ord: Skicka Beställ 10 doser från Tyskland och 4 från USA, men inga från Ryssland och Kina. Hela budgeten går åt, eftersom det första bivillkoret är aktivt, och alla tillgängliga doser från Tyskland går åt, eftersom det fjärde bivillkoret är aktivt.

1b: Det största skuggpriset är $y_4 = 9/5$, så man hade tjänat mest på att förhandla fram ökad tillgång från Tyskland. (Det näst största skuggpriset är $y_1 = 2/5$, så en ökad budget kommer på andra plats.)

1c: Ny variabel x_{11}. Reducerad kostnad: $\hat{c}_{11} = c_{11} - a_{11}^T y = c_{11} - (6y_1 + 3y_2) = c_{11} - (12/5) > 0$ om $c_{11} > 12/5 = 2.4$. Svar: Nyttokoefficienten ska vara större än 2.4.

1d: Se kurslitteraturen.

Uppgift 2

2a: Vi söker en maximal matchning. Finn en utökande väg, t.ex. 9-1-2-11, och alternera matchningen. Finn en utökande väg, t.ex. 12-3-4-10, och alternera matchningen. Nu är alla noder matchade. Paren blir 1-9, 2-11, 3-12, 4-10, 5-6 och 7-8. (Man kan även göra det mha. "blommor", genom att krympa de udda cyklerna som finns i grafen.)

2b: Grafen blir tudelad, med nybörjare i en delen och erfarna i den andra, och varje par ska innehålla en i varje del. Det blir en tudelad matchning, dvs. en tillordning. Om man dessutom har värden på varje möjlig parbildning, kan vi lösa det med ungerska metoden.

2c: Grafen innhåller (flera) K3, dvs. klickar av storlek 3, vilket säger att det behövs minst 3 färger. Det går ganska enkelt att hitta en nodfärgning med 3 färger, så den övre gränsen är också 3.

2d: Nod 1 och 3 har valens 4, så det krävs minst 4 färger. Det går ganska enkelt att hitta en bågfärgning med 4 färger, så den övre gränsen är också 4.

Uppgift 3

3a: Inför en dummykälla, nod 7, av styrka 2 (som är total sänkstyrka 8 minus total källstyrka 6), och bågar (7,4), (7,5) och (7,6) med kostnad noll. Flödet i dessa bågar är bristen, dvs. det som kommer att saknas.

3b: I den givna startlösningen är $x_{74} = 1$, $x_{75} = 1$ och $x_{76} = 0$. Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,3), (3,6), (2,4), (7,4) och (7,5) samt t.ex. (5,3). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -8$, $y_3 = 6$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0$, $y_6 = 14$, $y_7 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{16} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{25} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{43} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 23 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{76} = -14 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$). Vi får x_{76} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 7-6-3-5-7, och maximal ändring blir 0, pga. båge (5,3), så vi väljer (5,3) som utgående. Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 6$, $y_4 = 14$, $y_5 = 14$, $y_6 = 14$, $y_7 = 14$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{16} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{25} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{43} = 16 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 14 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). $\hat{c}_{65} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal. Observera att vi inte har ändrat flödet. (Hade vi valt (7,6) som basbåge från början, hade vi inte behövt göra en degenererad iteration.)

3c: Nu fås $\hat{c}_{25} = 6 + 10 - 14 = 2 > 0$, inte optimalt. Vi får x_{25} som inkommande variabel, att minska. Cykeln blir 5-2-4-7-5, och maximal ändring blir 1, pga. båge (2,4) (eller (7,4)), så vi väljer (2,4) som utgående. Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 6$,

$y_4 = 14$, $y_5 = 14$, $y_6 = 14$, $y_7 = 14$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{16} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{24} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{43} = 16 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 14 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). $\hat{c}_{65} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

Vi gjorde flödesändringen -1, och eftersom reducerad kostnad för inkommande variabel var 2, så minskades totalkostnaden med 2.

3d: Kalla superkällan nod 8 och supersänkan nod 9. (Nod 7 från tidigare deluppgifter finns ej med.)

Finn maxflöde från nod 8 till nod 9. Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 8-2-4-9, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2,4) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu t.ex. vägen 8-2-5-9, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2,5) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu t.ex. vägen 8-1-3-9, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,3) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 8-1-6-9, med kapacitet 1. Skicka 1 enhet och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,6) blir full.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka noderna 8, 1 och 2, så minsnittet går över bågarna (1,3), (1,6), (2,4) och (2,5). Det betyder att om man vill öka maxflödet, måste kapaciteten på någon av dessa bågar ökas. Maxflödet är 8.

Uppgift 4

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 0$, $x_2 = 19/9 \approx 2.11$ och $z = 95/3 \approx 31.67$, vilket ger $\bar{z} = 31$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 3$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 1/7 \approx 0.14$, $z = 220/7 \approx 31.43$ vilket ger $\bar{z} = 31$.
Förgrena över x_1: P3 = P1 + ($x_1 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $z = 30$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 30$. Kapa.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 4/3 \approx 1.33$, $z = 30$, vilket ger $\bar{z} = 30$.
Vi har nu $\bar{z} = 30 = \underline{z}$ så grenen kapas.
P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.
Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Svar: Inrätta två vaccinationsstationer vid sjukhusen. Total kapacitet blir 30.

Uppgift 5

5a: Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 2$, $p_2 = 1$, $y_3 = 4$, $p_3 = 1$, $y_4 = 4$, $p_4 = 1$, $y_5 = 6$, $p_5 = 2$, $y_6 = 6$, $p_6 = 2$, $y_7 = 7$, $p_7 = 3$, $y_8 = 7$, $p_7 = 4$, $y_9 = 8$, $p_7 = 4$, $y_{10} = 8$, $p_{10} = 5$, $y_{11} = 8$, $p_{11} = 5$, $y_{12} = 9$, $p_{12} = 7$, $y_{13} = 12$, $p_{13} = 11$, $y_{14} = 11$, $p_{14} = 7$, $y_{15} = 11$, $p_{15} = 9$, $y_{16} = 12$, $p_{16} = 11$, $y_{17} = 14$, $p_{17} = 15$. I ovanstående lösning anger y_j när person j blev smittad och p_j av vem. Alla är smittade efter 14 dagar.

Uppgift 6

Inga fixeringar fås i första rundan, så vi förgrenar över x_1.
I grenen $x_1 = 1$: Bivillkor 1 ger $x_3 = 0$. Bivillkor 3 ger $x_2 = 0$. Inga fler fixeringar. Förgrena över x_4.

I grenen $x_4 = 1$: ($x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$) Alla variabler fixerade. $x = (1, 0, 0, 1)$. Kolla tillåtenhet. Lösningen tillåten: $z = 15$.
Nytt målfunktionsbivillkor: $10x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 5x_4 \geq 16$.
Kapa grenen.
I grenen $x_1 = 0$: Målfunktionsbivillkoret ger $x_3 = 1$. Bivillkor 1 ger $x_2 = 0$ och $x_4 = 0$. Alla variabler fixerade. $x = (0, 1, 0, 0)$. Kolla tillåtenhet. Målfunktionsbivillkoret kan ej uppfyllas. Kapa grenen.

Trädet avsökt. Optimal lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, med $z = 15$.
Svar: Värva kandidat 1 och 4.

Uppgift 7

Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 2, 3, 5 och 9 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (3,5) samt (2,4) och (4,9), till en kostnad av 15, så dessa bågar dubbleras (gås mer än en gång) till kostnad av 15. En rundtur blir då t.ex. 1-3-5-3-4-5-6-7-9-8-2-4-9-4-2-10-1, med totaltiden $80 + 15 = 95$.

Uppgift 8

Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 26, vilket är en undre gräns.

Yttervarvet ger en tillåten lösning med kostnaden 31. Ett 3-byte, (1,2), (2,3), (6,7) bort, ersättes av (1,3), (2,6) och (2,7), sänker kostnaden till 29. (Även andra heurstiker kan användas.)

Vi får övre gräns 29 och undre gräns 26, så vår lösning är högst 3 enheter för dyr.

Nod 3 har för hög valens i 1-trädet, så vi kan lägga till bivillkoret
$x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{36} \leq 2$.

Uppgift 9

9a: Efter första steget fås $\alpha = (7, 8, 8, 5, 6)$ och $\beta = (0, 0, 8, 11, 6)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 2 och 3, samt kolumn 2, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (7, 8, 8, 6, 7)$ och $\beta = (0, -1, 8, 11, 6)$. Man kan nu inte stryka alla nollor med färre än 5 streck. Man får t.ex. lösningen $x_{13} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{42} = 1$, $x_{51} = 1$, och total kostnad blir 60. Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 60, så starka dualsatsen är uppfylld.

9b: Primala optimallösningen förändras ej. Duala optimallösningen förändras genom att β_4 ökas med 5 (från 11 till 16), β_5 ökas med 10 (från 6 till 16), och α_5 ökas med 4 (från 7 till 11). (Skulle man lösa om problemet från början är det inte säkert att man får dessa α och β.)