Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP33
Lösning till tentamen
2021-08-27

Lösningar

Uppgift 1

1a: Det är ett kinesiskt brevbärarproblem. Till en nod med valens ett måste maskinen köra fram och tillbaka, någon annan möjlighet finns inte. Därför kan dessa bågar elimineras (tas bort), och kostnaden att köra dem fram och tillbaka adderas till totalkostnaden. På detta sätt elimineras bågarna (4,7), (6,9) och (10,11) samt i nästa steg (1,10). Kostnaden för detta blir 62.

1b: I den kvarvarande grafen har noderna 1, 4, 5 och 6 udda valens, och det billigaste sättet att få jämn vales är att dubblera bågarna (1,3), (3,4) och (5,6). Kostnaden för turen blir $54 + 13 = 67$, och med det som eliminerades blir det totalt 129.

Uppgift 2

2a: Billigaste väg, lös med Dijkstras metod. Väg: 1-3-5-8-10, kostnad: 17.

2b: Billigaste väg med negativa kostnader, lös med Fords metod. Väg: 1-3-5-7-9-10, kostnad: 8.

2c: I kortaste vägträdet har nod 7 nodpris 15 och nod 5 som föregångare. Nod 6 har nodpris 10. En sänkning av c_{67} med 2 enheter skulle göra att nod 6 istället blir föregångare till nod 7, och då kommer nodpriset för nod 7 att bli $10 + c_{67}$, vilket inte kan bli lägre än 10 (eftersom tid är ickenegativ). Det betyder att nodpriset för nod 9, om man kom från nod 7, skulle bli lägst 14, vilket skulle ge lägsta nodpris 19 i nod 10. Då detta är högre än 17, som är nuvarande nospris i nod 10, kan man inte få någon ändring av kortaste väg genom att ändra c_{67}.

Uppgift 3

Handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 27. Tillåten lösning med valfri heuristik, kostnad: 29. Vi får alltså övre gräns 29 och undre gräns 27, så lösningen ligger högst 2 från optimum.

Uppgift 4

4a: Inför slackvariabler x_4, x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-3	-5	0	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	0	0	0	12
x_5	0	1	0	0	0	1	0	0	4
x_6	0	0	1	0	0	0	1	0	6
x_7	0	0	0	1	0	0	0	1	5

Först fås x_3 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-3	0	0	0	0	5	25
x_4	0	1	1	0	1	0	0	-1	7
x_5	0	1	0	0	0	1	0	0	4
x_6	0	0	1	0	0	0	1	0	6
x_3	0	0	0	1	0	0	0	1	5

Därefter fås x_1 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	-3	0	0	4	0	5	41
x_4	0	0	1	0	1	-1	0	-1	3
x_1	0	1	0	0	0	1	0	0	4
x_6	0	0	1	0	0	0	1	0	6
x_3	0	0	0	1	0	0	0	1	5

Sedan fås x_2 som inkommande variabel och x_4 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	3	1	0	2	50
x_2	0	0	1	0	1	-1	0	-1	3
x_1	0	1	0	0	0	1	0	0	4
x_6	0	0	0	0	-1	1	1	1	3
x_3	0	0	0	1	0	0	0	1	5

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, (samt $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 3$ och $x_7 = 0$) med $z = 50$.

Bivillkor 1, 2 och 4 är aktiva, eftersom slackvariablerna är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 3$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, $y_4 = 2$, $v = 50$.

Svar i ord: Använd 4 kvadratmeter till godis, 3 kvadratmeter till väskor och 5 kvadratmeter till kläder.

4b: Skuggpriserna är lika med duallösningen (3,1,0,2), och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet men en enhet. Att öka totala ytan (bivillor 1) skulle ge mest, att öka gränsen för kläder lite mindre, för godis ännu mindre och för väskor inget alls.

4c: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = 3 - y_1 = 3 - 3 = 0$. Svar: Lösningen skulle inte förbättras av detta. (Men man skulle kunna hitta en annorlunda lika bra lösning.)

Uppgift 5

5a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,4), (1,7), (2,3), (2,5), (3,6) och (7,5). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 13$, $y_4 = 15$, $y_5 = 21$, $y_6 = 19$, $y_7 = 13$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{27} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{37} = 12 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{74} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

5b: Nu fås $\hat{c}_{27} = 10 - 13 = -2 < 0$, inte optimalt. Vi får x_{27} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 2-7-5-2, och maximal ändring blir 3, pga. båge (2,5), så vi väljer (2,5) som utgående. Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 16$, $y_4 = 15$, $y_5 = 21$, $y_6 = 22$, $y_7 = 13$, och reducerade kostnaderna: $\hat{c}_{25} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{37} = 15 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{74} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

5c: Eftersom $\hat{c}_{45} = 1$ skulle totalkostnaden öka med 1 för varje enhet (100-tal) vi skickar där.

5d: Ingen ickebasbåge har flöde på den övre gränsen, så det finns ingen båge där en ökning av övre gränsen skulle ändra flödet, så man kan inte sänka kostnaden på det sättet.

Uppgift 6

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 6$, $x_2 = 3$ och $z = 54$, vilket ger $\bar{z} = 54$.
Detta är också en tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 54$.
Vi har nu $\bar{z} = 54 = \underline{z}$ så grenen kapas. Svar: Optimallösning är 6 åkattraktioner och 3 spelstånd, med målfunktionsvärde 54.

Uppgift 7

7a: Finn maxflöde från nod 1 till nod 7. Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-4-3-5-7, med kapacitet 6. Skicka 6 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1,2) och (3,4) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-4-6-7, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (4,5) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-4-3-6-7, med kapacitet 1. Skicka 1 enhet och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1,4), (4,3) och (6,7) blir fulla.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka nod 1, så minsnittet går över bågarna (1,2) och (1,4). Maxflödet är 12.

7b: En båge (3,7) skulle inte hjälpa, eftersom både noderna ligger på samma sida av minsnittet.

Uppgift 8

8a: Efter första steget fås $\alpha = (8, 10, 5, 7, 6)$ och $\beta = (0, 0, 1, 0, 4)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 2, samt kolumn 1 och 4, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (8, 10, 6, 8, 7)$ och $\beta = (-1, 0, 1, -1, 4)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 4, samt kolumn 4 och 5, med minsta ostrukna element 2, vilket gör att vi får $\alpha = (8, 12, 8, 8, 9)$ och $\beta = (-1, 0, 1, -3, 2)$. Man kan nu inte stryka alla nollor med färre än 5 streck. Man får t.ex. lösningen $x_{13} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{54} = 1$, och total kostnad blir 44. Optimal duallösning är $\alpha = (8, 12, 8, 8, 9)$ och $\beta = (-1, 0, 1, -3, 2)$. Summering av duallösningen ger 44, så starka dualsatsen är uppfylld.

8b: Alla kostnadskoefficienter i en viss kolumn, j, ökas med 1000. Duala optimallösningen förändras genom att β_j ökas med 1000. Primala optimallösningen förändras ej. Den unga personen blir troligen missnöjd, och borde gå en kurs i optimering.

Uppgift 9

9a: Man vill hitta en maximal matchning. Förbättra lösningen genom att hitta en utökande väg, dvs. en alternerande väg som börjar och slutar i en omatchad nod. En utökande väg är (t.ex.) 11-9-8-7-6-5-4-2. Byte av matchad båge mot omatchad och v.v. ger att noderna 11 och 2 också blir matchade. Nu är bara nod 10 omatchad. Bättre lösning går inte att få, ty antalet noder är udda.

(Det hade också gått bra med utökande väg 11-9-8-10. Vägens längd har ingen betydelse.)

9b: Grafen innehåller en klick av storlek tre, så det krävs minst tre färger. En enkel heuristik kan ge en lösning med tre färger, så övre och undre gräns är båda lika med tre.

9c: Nod 8 har valens fem, så det krävs minst fem färger Det är enkelt att hitta en lösning med fem färger, så övre och undre gräns är båda lika med fem.