Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP33
Lösning till tentamen
2021-10-25

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-3	-3	-5	0	0	0	0
x_5	0	1	2	3	4	1	0	0	200
x_6	0	1	1	0	0	0	1	0	100
x_7	0	0	0	1	1	0	0	1	100

Först fås x_4 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-11/4	-1/2	3/4	0	5/4	0	0	250
x_4	0	1/4	1/2	3/4	1	1/4	0	0	50
x_6	0	1	1	0	0	0	1	0	100
x_7	0	-1/4	-1/2	1/4	0	-1/4	0	1	50

Därefter fås x_1 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	9/4	3/4	0	5/4	11/4	0	525
x_4	0	0	1/4	3/4	1	1/4	-1/4	0	25
x_1	0	1	1	0	0	0	1	0	100
x_7	0	0	-1/4	1/4	0	-1/4	1/4	1	75

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 100$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 25$, (samt $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ och $x_7 = 75$) med $z = 525$. Bivillkor 1 och 2 är aktiva, eftersom slackvariablerna är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 5/4$, $y_2 = 11/4$, $y_3 = 0$, $v = 525$.

Svar i ord: Detta skulle ge 100 ettor och 25 bostäder med 4 rum eller fler. Bivillkoret för utrymme och material blir begränsande, samt det första av blandningsbivillkoret. Eftersom tvåor och treor saknas helt, är det tveksamt om det blir ett blandat boende. Det blir nog bara studenter och välbeställda familjer. (Om man bara har tre bivillkor blir högst tre variabler större än noll.)

1b: Skuggpriserna är lika med duallösningen (5/4, 11/4, 0), och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet men en enhet. Att öka högerledet på bivillor 1 skulle ge en viss vinst, men att öka högerledet på bivillkor 2 skulle ge mer, men för bivillkor 3 inget. Välj bivillkor 2.

1c: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = c_8 - 6y_1 = c_8 - 33/2 \geq 0$ om $c_8 \geq 16.5$. Vinsten skulle alltså behöva vara större än 16.5, så taklägenheter skulle behöva vara ganska dyra.

Uppgift 2

2a: Denna uppgift är lite klurig eller jobbig. När man löser LP-problemet P0, upptäcker man att att två extrempunkter är lika bra.
A: $x_1 = 35/4 = 8.75$ och $x_2 = 55/2 = 27.5$, med $z = 100$.
B: $x_1 = 230/7\ approx 32.85$ och $x_2 = 80/7 \approx 11.43$, med $z = 100$.
Detta ger $\bar{z} = 100$.

Man ser att första bivillkoret är parallellt med målfunktionen. Det jobbiga sättet är att välja en av dessa två, och börja förgrena. Efter ett större antal förgreningar fås optimum.

Det kluriga sättet är att inse att alla konvexkombinationer av punkterna A och B också är optimala i P0. Kan det möjligtvis finnas någon heltalspunkt på den linjen? Vi letar alltså efter en punkt där första bivillkoret är aktivt, dvs. där $4x_1 + 6x_2 = 200$, vilket kan skrivas som $x_1 = 50 - 3x_2/2$. Nu ser vi att om x_2 är ett jämnt heltal, blir också x_1 heltal. Eftersom A och B är extrempunkter, bör vi kräva att $11.43 \leq x_2 \leq 27.5$. Ett jämnt heltal i detta intervall är $x_2 = 12$. Kontroll: Detta ger $x_1 = 32$, $x_2 = 12$ och $z = 100$. Punkten uppfyller alla bivillkor. Vi har nu en heltalslösning med $z = 100$, vilket ger $\underline{z} = 100$. Vi har nu $\bar{z} = \underline{z}$, så grenen kapas. Vi har inte gjort någon förgrening, så trädet är avsökt, och problemet är löst.

(Man kan också välja $x_2 = 26$, vilket ger $x_1 = 11$. Denna punkt har också $z = 100$.)

Svar: Det finns flera optimallösningar. En är att bygga 32 små hus och 12 större, en annan är att bygga 11 små hus och 26 större. Båda har målfunktionsvärde 100, vilket är det bästa möjliga.

2b: Man kan notera att origo är en tillåten punkt (men dålig), så vi kräver $z \geq 1$ för att få en bättre lösning. Vi får:
$VL_0 = -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 1 \leq 0$
$VL_1 = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10 \leq 0$
$VL_2 = x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 \leq 0$
$VL_3 = -2x_1 + x_2 + x_4 - 2 \leq 0$.

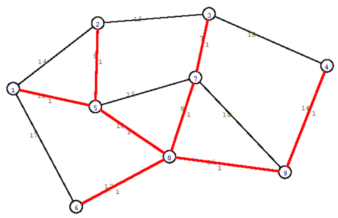
Först fås inga fixeringar, så vi förgrenar över x_1. För $x_1 = 1$ fås inga fixeringar, så vi förgrenar över x_2. För $x_1 = 1$ och $x_2 = 1$ fås:
$\underline{VL_1} = 4 + 6 - 10 = 0$
Detta ger att både x_3 och x_4 måste fixeras till noll. Lösningen är nu helt fixerad, och en sista kontroll visar att lösningen är tillåten i alla bivillkor. Lösningen ger $z = 5$, så nu kräver vi att $z \geq 6$, vilket ger
$VL_0 = -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 6 \leq 0$
En ej kapad gren är $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, vilket ger $\underline{VL_0} = -2 - 2 - 3 + 6 = -1 \leq 0$
Detta ger att både x_3 och x_4 måste fixeras till ett. Vi får då $\underline{VL_1} = 4+3+5-10 = 2 > 0$ så grenen kapas.

Nu återstår grenen $x_1 = 0$, vilket ger $\underline{VL_0} = -3 - 2 - 3 + 6 = -2 \leq 0$
Detta ger att x_2 och x_4 måste fixeras till ett. Vi får då $\underline{VL_1} = 6 + 5 - 10 = 1 > 0$ så grenen kapas.

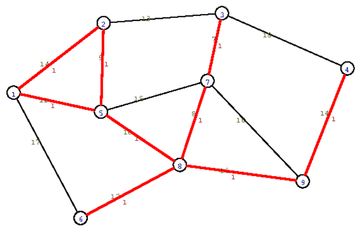
Alla grenar är nu kapade, och den bästa lösningen är $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, med $z = 5$.

Uppgift 3

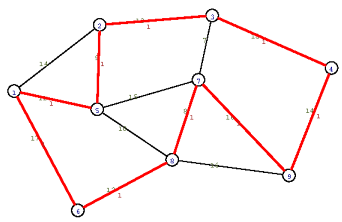
3a: Finn billigaste uppspännande träd med Kruskals eller Prims metod, vilket ger $z = 87$.



3b: Handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 101.



För att få en tillåten lösning kan man notera att nod 4 och 6 har valens 2, så alla bågar som ansluter till dessa två noder måste vara med i lösningen. En girig heuristik med dessa begräsningar kan ge lösningen 1-5-2-3-4-9-7-8-6-1, med kostnaden 118. Vi får alltså övre gräns 118 och undre gräns 101, så lösningen ligger högst 17 från optimum.



3c: Det är ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 1, 2, 3 och 9 har udda valens, och det billigaste sättet att få jämn vales är att dubblera bågarna (1,2), (3,7) och (7,9). Kostnaden för turen blir $168 + 37 = 205$. En optimal tur är 1-2-5-1-2-3-4-9-7-3-7-9-8-7-5-8-6-1.

Graf 2, som är en handelsresandetur, är mycket enkelt att snöröja. Det är bara att följa rundturen (en gång). Ingen båge passeras mer än en gång.

Graf 1, som är ett träd, är jobbigare att snöröja, eftersom man kan förvänta sig många noder med valens ett, vilket gör att många bågar måste passeras mer än en gång. Det är inte så svårt att hitta billigaste vägen mellan två noder, eftersom det bara finns en väg, men att hitta det billigaste sättet att höja alla valenser till jämna är fortfarande ett matchingsproblem. Så det är sannolikt jobbigare att lösa problemet i graf 1 än i graf 3.

3d: Bågfärgning. Nod 5 (och 7) har valens fyra, så det krävs minst fyra färger. Det är enkelt att hitta en lösning med fyra färger (bevisas genom att göra det), så övre och undre gräns är båda lika med fyra.

3e: Nodfärgning. Grafen innehåller en klick av storlek tre, så det krävs minst tre färger. En enkel heuristik kan ge en lösning med tre färger (bevisas genom att göra det), så övre och undre gräns är båda lika med tre.

3f: Man vill hitta en maximal matchning. Förbättra lösningen genom att hitta en utökande väg, dvs. en alternerande väg som börjar och slutar i en omatchad nod. En utökande väg är (t.ex.) 6-8-5-7-3-4. Byte av matchad båge mot omatchad och v.v. ger att noderna 4 och 6 också blir matchade. En utökande väg nu är (t.ex.) 1-5-7-9. Byte av matchad båge mot omatchad och v.v. ger att noderna 1 och 9 också blir matchade. Nu är bara nod 2 omatchad. Bättre lösning går inte att få, ty antalet noder är udda.

Uppgift 4

4a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,5), (2,3), (5,3), (5,6), (7,8), (8,4) samt t.ex. (3,4) Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 15$, $y_3 = 30$, $y_4 = 47$, $y_5 = 13$, $y_6 = 31$, $y_7 = 15$, $y_8 = 30$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{58} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{75} = 15 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{64} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

Om man tar båge (7,5) istället för (3,4) som basbåge, blir optimalitetskriterierna inte uppfyllda direkt. Man får båge (3,4) som inkommande, och gör en degenererad iteration, dvs. där flödesändringen blir noll. Man får (7,5) som utgående, och i nästa iteration blir optimalitetsvillkoren uppfyllda som beskrives ovan. Eftersom flödet inte har ändrats, är startlösningen alltså optimal.

4b: Nu fås $\hat{c}_{57} = 1 + 13 - 15 = -1 < 0$, inte optimalt. Vi får x_{57} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 5-7-8-4-3-5, och maximal ändring blir 2, pga. båge (8,4) (eller (5,3)), så vi väljer (8,4) som utgående. De nodpriser som ändras är $y_7 = 14$ och $y_8 = 29$, och de förändrade reducerade kostnaderna blir $\hat{c}_{58} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{75} = 14 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{84} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

Även här kan man behöva göra en degenererad iteration om man har en annan startbas. Men man ska ju inte sluta förrän optimalitet har verifierats.

4c: Låt nod 9 vara nya noden. Finn maxflöde från nod 9 till nod 4. Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får t.ex. vägen 9-2-3-4, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (2,3) och (3,4) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu t.ex. vägen 9-1-5-6-4, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1,5), (5,6) och (6,4) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 9-7-8-4, med kapacitet 7. Skicka 7 enhet och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (7,8) och (8,4) blir fulla.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka alla noder utom 6 och 4, så minsnittet går över bågarna (3,4), (5,6) och (8,4). Maxflödet är 21.

Uppgift 5

5a: Billigaste väg, lös med Dijkstras metod. Lösningen ger nodpriser (gångtid) för alla noderna. Vi får nodpriser och föregångare $y_1 = 0$, $y_2 = 13$, $p_2 = 5$, $y_3 = 28$, $p_3 = 2$,

$y_4 = 28$, $p_4 = 6$, $y_5 = 9$, $p_5 = 1$, $y_6 = 20$, $p_6 = 5$, $y_7 = 12$, $p_7 = 1$, $y_8 = 19$, $p_8 = 7$, $y_9 = 36$, $p_9 = 8$, $y_{10} = 24$, $p_{10} = 7$ Det högsta nodpriset är $y_9 = 36$, så det tar alltså 36 minuter att gå dit. Vägen är 1-7-8-9.

5b: Vi har $y_8 = 19$, så den nya bågen skulle ge $y_9 = 31$, vilket är en förbättring. Den maximala tiden minskar med 5 minuter.

Uppgift 6

6a: Efter första steget fås $\alpha = (7, 8, 9, 6, 7)$ och $\beta = (0, 0, 8, 10, 6)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 2 och 5, samt kolumn 2 och 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (8, 8, 10, 7, 7)$ och $\beta = (0, -1, 7, 10, 6)$. Man kan nu inte stryka alla nollor med färre än 5 streck. Man får t.ex. lösningen $x_{12} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{51} = 1$, och total kostnad blir 62. Optimal duallösning är $\alpha = (8, 8, 10, 7, 7)$ och $\beta = (0, -1, 7, 10, 6)$. Summering av duallösningen ger 62, så starka dualsatsen är uppfylld.

6b: Alla kostnadskoefficienter i rad 1 ökar med 2, i rad 2 med 3, i rad 3 med 2 och i rad 5 med 1. Duala optimallösningen förändras då genom att α_1 ökas med 2, α_2 ökas med 3, α_3 ökas med 2, α_5 ökas med 1. Optimal duallösning är alltså nu $\alpha = (10, 11, 12, 7, 8)$ och $\beta = (0, -1, 7, 10, 6)$. Den primala optimallösningen förändras ej. Den totala kostnaden ökar med $2 + 3 + 2 + 1 = 8$.