Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP33
Lösning till tentamen
2022-10-24

Lösningar

Uppgift 1

1a: Som anges i uppgiften startar man med x_1, x_2, x_3 och x_4 som basvariabler, och det angivna uttrycket för målfunktionen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	0	-4.5	-5	1149
x_1	0	1	0	0	0	0.2	0	15
x_2	0	0	1	0	0	0.3	0.5	17
x_3	0	0	0	1	0	0.5	0	18
x_4	0	0	0	0	1	0	0.5	18

Först fås x_6 som inkommande variabel och x_2 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	10	0	0	-1.5	0	1319
x_1	0	1	0	0	0	0.2	0	15
x_6	0	0	2	0	0	0.6	1	34
x_3	0	0	0	1	0	0.5	0	18
x_4	0	0	-1	0	1	-0.3	0	1

Därefter fås x_5 som inkommande variabel och x_3 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	10	3	0	0	0	1373
x_1	0	1	0	-0.4	0	0	0	7.8
x_6	0	0	2	-1.2	0	0	1	12.4
x_5	0	0	0	2	0	1	0	36
x_4	0	0	-1	0.6	1	0	0	11.8

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 7.8$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 11.8$, $x_5 = 36$, $x_6 = 12.4$ med $z = 1373$. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna (med hjälp av ledningen i uppgiften). $y_1 = 2$, $y_2 = 2.5$, $y_3 = 2.1$, $y_4 = 1.5$, $v = 1373$.

Svar i ord: Gör 7.8 buntar av blandning 1, 11.8 buntar av blandning 4, 36 buntar av blandning 5 och 12.4 buntar av blandning 6. Palrik tjänar 1373 kr.

1b: Skuggpriserna är lika med duallösningen, och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet med en enhet. Lite fler Fantomen skulle ge störst vinstökning.

1c: Alternativ 1: Icke hela buntar: 0.8 bunt av blandning 1, 0.8 bunt av blandning 4, och 0.4 bunt av blandning 6. I ord: en bunt med 8 st Fantomen, en bunt 8 st Övrigt, och en bunt med 2 st Fantomen och 2 st Övrigt.

Alternativ 2: Det som går bort från lösningen: 0.8 bunt av blandning 1, 0.8 bunt av blandning 4, och 0.4 bunt av blandning 6. Kostnad för detta: $0.8{*}20{+}0.8{*}15{+}0.4{*}20 = 16 + 12 + 8 = 36$. Alltså sjunker vinsten från 1373 till 1337.

1d: Ny variabel x_7. Reducerad kostnad: $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = 40 - 5y_1 - 5y_2 - 5y_3 - 5y_4 = 40 - 10 - 12.5 - 10.5 - 7.5 = -0.5 < 0$. Nej, det skulle inte ge större vinst.

1e: Det nya målfunktionsuttrycket fås som den ursprungliga målfunktionen minus 2 gånger bivillkor 1 minus 1.5 gånger bivillkor 2 minus 1.8 gånger bivillkor 3 minus 1.5 gånger bivillkor 4.

1f: Se kurslitteraturen. Dualt bivillkor från ny variabel: $5y_1 + 5y_2 + 5y_3 + 5y_4 \geq 40$. Med duallösning instoppad: $40.5 \geq 40$. Lösningen är alltså fortfarande tillåten, så ingen ändring sker.

Uppgift 2

2a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,3), (2,5), (3,4) och (4,6), samt någon som binder ihop dessa delträd. Jag väljer (2,3). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 8$, $y_4 = 18$, $y_5 = 15$, $y_6 = 25$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = -10 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 14 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 16 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal.

2b: Nu får vi $\hat{c}_{36} = -7 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$). Välj x_{36} som inkommande, att öka. Cykeln blir 3-6-4-3, och maximal ändring blir 5. Det ger båge (3,4) som utgående. Nya nodpriser blir $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 8$, $y_4 = 11$, $y_5 = 15$, $y_6 = 18$, och reducerade kostnaderna $\hat{c}_{14} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{34} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal. Totalkostnaden sänks med $7 * 5 = 35$.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med flöde noll.

För nätverket i uppgift a: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-3-4-6, med kapacitet 25. Skicka 25 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Samtliga bågar i vägen blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu märka alla noder utom 6 (och 2), så minsnittet går över bågarna (4,6) och (6,5) baklänges. Maxflödet är 25.

För nätverket i uppgift b: Gör första iterationen som ovan. I andra iterationen fås vägen 1-4-3-6, med kapacitet 10. Skicka 10 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1,4) och (3,6) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan bara märka nod 1, så minsnittet går över bågarna (1,3) och (1,4). Maxflödet är 35.

Uppgift 3

3a: Det är ett handelsresandeproblem. Eftersom en nod har valens ett, har det normala handelsresandeproblemet ingen tillåten lösning. Man måste passera nod 3 två gånger för att nå nod 4. Om man tillåter återbesök, finns det en lösning. Eftersom en sådan lösning måste innehålla att man går fram och tillbaka i båge (3,4), kan vi fixera denna del av lösningen, och temporärt ta bort nod 4 och båge (3,4) ur problemet. Efteråt lägger vi till den delen och ökar kostnaden med 12.

Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 37.

Det visar sig att 1-trädet faktiskt är en tillåten lösning, med valens 2 för alla noder. Om vi lägger till den fixerade delen, får vi turen 1-2-3-4-3-5-6-7-1, med kostnaden 53. Undre gränsen blir också 53, så lösningen är optimal.

3b: Eftersom varje rum ska undersökas en gång, är den totala tiden för detta konstant, och påverkas inte av vilken väg man väljer.

3c: Det är nu ett kinesiskt brevbärarproblem. Faktorn 10 är ointressant och påverkar inte vilken lösning som är bäst. Noderna 2, 3, 4 och 6 har udda valens, och det billigaste sättet att få jämn valens är att dubblera bågarna (2,6) och (3,4). Kostnaden för turen blir 69. En optimal tur är 1-2-3-4-3-5-6-2-6-7-1.

Uppgift 4

4a: Billigaste väg, lös med Fords metod. Billigaste vägen: 1-2-5-6-7, kostnad -2.

5b: Vi har $y_6 = -2$ och $y_8 = 10$, så en väg till nod 6 blir lika bra, och till nod 8 mycket sämre. Ingen blir bättre.

Uppgift 5

5a: P0: LP-optimum: $x_1 = 0$, $x_2 = 4.5$, $z = 13.5$. Detta ger $\bar{z} = 13$. Vi förgrenar över x_2.

P1 = P0 $+(x_2 \leq 4)$.
P2 = P0 $+(x_2 \geq 5)$.

P1: LP-optimum: $x_1 = 0.2$, $x_2 = 4$, $z = 13.4$, vilket ger ger $\bar{z} = 13$. Förgrena över x_1.

P3 = P1 $+(x_1 \leq 0)$.
P4 = P1 $+(x_1 \geq 1)$.

P3: LP-optimum: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $z = 12$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 12$. Spara lösningen och kapa grenen.

P4: LP-optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $z = 13$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 13$. Spara lösningen och kapa grenen.

P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.

Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $z = 13$. I ord: Köp en stor och två små lådor.

6b: Båda bivillkoren är aktiva i optimum.

Uppgift 6

6a: Efter första steget fås $\alpha = (5, 5, 4, 4, 4)$ och $\beta = (0, 2, 0, 0, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 2 och 5, samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 5, 5, 5, 4)$ och $\beta = (-1, 2, 0, 0, 1)$. Nu kan man inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får (till exempel) lösningen $x_{14} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{42} = 1$, $x_{53} = 1$, och total kostnad blir 26. Optimal duallösning är $\alpha = (5, 5, 5, 5, 4)$ och $\beta = (-1, 2, 0, 0, 1)$. Summering av duallösningen ger 26, så starka dualsatsen är uppfylld.

7b: Det hjälper inte. α_5 minskar med 2. Samma primallösning är fortfarande optimal. Optimala målfunktionsvärdet minskar med 2.

Uppgift 7

7a: Utökande väg: 11-9-7-6. Alternera matchingarna längs den vägen.

Nu finns två omatchade noder, men utökande väg saknas. (Grafen är inte sammanhängade.)

Bästa matchning: (1,2), (3,4), (6,7), (8,10), (9,11).

7b: Nodfärgning. Grafen innehåller K4, en fullständig komponent med fyra noder, nämligen noderna 7, 8, 9 och 10, så minst fyra färger går åt. Det är lätt att hitta en färgning med fyra färger, som alltså är optimal.

7c: Bågfärgning. Den maximala valens hos någon nod i grafen är 5 (nod 8 och 9), så minst fem färger går åt. Det är lätt att hitta en färgning med fem färger, som alltså är optimal.