

## Lösningar

### Uppgift 1

**1a:** Starta med slackvariablerna som basvariabler.

| Bas   | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\hat{b}$ |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| $z$   | 1   | -4    | -5    | -6    | 0     | 0     | 0     | 0     | 0         |
| $x_4$ | 0   | 3     | 2     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 12        |
| $x_5$ | 0   | 3     | 2     | 3     | 0     | 1     | 0     | 0     | 18        |
| $x_6$ | 0   | 2     | 2     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 6         |
| $x_7$ | 0   | 0     | 2     | 3     | 0     | 0     | 0     | 1     | 10        |

Först fås  $x_3$  som inkommande variabel och  $x_7$  som utgående.

| Bas   | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\hat{b}$ |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| $z$   | 1   | -4    | -1    | 0     | 0     | 0     | 0     | 2     | 20        |
| $x_4$ | 0   | 3     | 4/3   | 0     | 1     | 0     | 0     | -1/3  | 26/3      |
| $x_5$ | 0   | 3     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | -1    | 8         |
| $x_6$ | 0   | 2     | 4/3   | 0     | 0     | 0     | 1     | -1/3  | 8/3       |
| $x_3$ | 0   | 0     | 2/3   | 1     | 0     | 0     | 0     | 1/3   | 10/3      |

Därefter fås  $x_1$  som inkommande variabel och  $x_6$  som utgående.

| Bas   | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $\hat{b}$             |
|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------------|
| $z$   | 1   | 0     | 5/3   | 0     | 0     | 0     | 2     | 4/3   | 76/3 $\approx$ 25.333 |
| $x_4$ | 0   | 0     | -2/3  | 0     | 1     | 0     | -3/2  | 1/6   | 14/3 $\approx$ 4.667  |
| $x_5$ | 0   | 0     | -2    | 0     | 0     | 1     | -3/2  | -1/2  | 4                     |
| $x_1$ | 0   | 1     | 2/3   | 0     | 0     | 0     | 1/2   | -1/6  | 4/3 $\approx$ 1.333   |
| $x_3$ | 0   | 0     | 2/3   | 1     | 0     | 0     | 0     | 1/3   | 10/3 $\approx$ 3.333  |

Nu är tablan optimal. Optimallösningen blir  $x_1 = 1.333$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 3.333$ ,  $x_4 = 4.667$ ,  $x_5 = 4$ ,  $x_6 = 0$ ,  $x_7 = 0$  med  $z = 25.333$ .

Optimallösningen är unik, eftersom ingen icke-basvariabel har reducerad kostnad noll. Bivillkor 3 och 4 är aktiva, eftersom slackvariablerna är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna,  $x_4 - x_7$ , enligt ledningen.  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 2$ ,  $y_4 = 1.333$ ,  $v = 25.333$ .

Svar i ord: Gör 1.333 flerpäck av sort 1 och 3.333 flerpäck av sort 3. Vinsten blir 25.333. Alla smultron och hallon går åt.

**1b:** Skuggpriserna är lika med duallösningen, och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet med en enhet.  $y_3 = 2$  är störst, så man skulle tjäna mest på att öka högerledet i bivillkor 3, dvs. skörda mer smultron.

**1c:** Ny variabel  $x_8$ . Reducerad kostnad:  $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = 3 - 4y_1 - 4y_2 = 3 > 0$ . Svar ja, det skulle förbättra lösningen.

Alternativ motivation: Det finns lite kvar av både röda och svarta vinbär ( $y_1 = y_2 = 0$ ), så man kan göra lite av det nya flerpaketet utan att minska något annat.

**1d:** Ny variabel  $x_9$ . Reducerad kostnad:  $\hat{c}_9 = c_9 - a_9^T y = c_9 - 4y_3 - 4y_4 = c_9 - 8 - 5.333 > 0$  om  $c_9 > 13.333$ .

**1e:** LP-dual:

$$\min 12y_1 + 18y_2 + 6y_3 + 10y_4$$

$$\text{då } 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 4, 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 \geq 5, y_1 + 3y_2 + y_3 + 3y_4 \geq 6, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Det nya duala bivillkoret blir  $4y_3 + 4y_4 \geq c_9$ . Med den duala lösningen  $y_3 = 2$  och  $y_4 = 1.333$  instoppad, blir bivillkoret  $13.333 \geq c_9$ .

## Uppgift 2

**2a:** Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,6), (2,3), (2,7), (6,5), (7,4) och (7,5). Detta ger nodpriserna  $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 7, y_4 = 8, y_5 = 10, y_6 = 5, y_7 = 4$ , och följande reducerade kostnader:  $\hat{c}_{13} = -2 < 0$  (optimalt ty  $x = u$ ),  $\hat{c}_{15} = -3 < 0$  (optimalt ty  $x = u$ ),  $\hat{c}_{26} = 1 > 0$  (optimalt ty  $x = 0$ ),  $\hat{c}_{24} = -1 < 0$  (optimalt ty  $x = u$ ),  $\hat{c}_{63} = 3 > 0$  (optimalt ty  $x = 0$ ),  $\hat{c}_{64} = 5 > 0$  (optimalt ty  $x = 0$ ). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

**2b:** Nu får vi  $\hat{c}_{64} = -1 < 0$  (ej optimalt ty  $x = 0$ ). Välj  $x_{64}$  som inkommande, att öka. Cykeln blir 6-4-7-5-6, och maximal ändring blir 1. Det ger både (7,4) som utgående (eller (6,5)). Nodpriserna blir oförändrade, förutom  $y_4 = 7$ , och ändringarna i reducerade kostnader blir  $\hat{c}_{24} = 0$  (optimalt),  $\hat{c}_{74} = 1 > 0$  (optimalt ty  $x = 0$ ). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal. Totalkostnaden sänks med  $1 * 1 = 1$ .

**2c:** Finn maxflöde från nod 1 till nod 5. Starta med flöde noll.

Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-6-5, med kapacitet 10. Skicka 10 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båda bågarna blir fulla.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-5, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,5) blir full.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu bara märka nod 1 och 3, så minsnittet går över bågarna (1,5), (1,6), (2,3) baklänges och (6,3) baklänges. Maxflödet är 13.

## Uppgift 3

**3a:** Matchningsproblem. Finn utökande väg. Första kan till exempel vara 1-2-9-7-8-10. Alternera matchingarna längs den vägen. Matcha sedan de omatchade noderna 4 och 6 med direktbågen. Detta ger paren (1,2), (7,9), (8,10), (4,6) samt (3,5). Alla personer är med i ett par.

**3b:** Det blir ett matchningsproblem med kostnader (vikter). Om grafen är tudelad kan man lösa problemet med ungerska metoden. Om inte, blir det betydligt svårare.

**3c:** Nodfärgningsproblemet. Den största klicken i grafen är  $K_3$ , så minst tre färger krävs. Man kan med en enkelt heuristik färga alla noder med tre färger. Så övre och undre gräns är tre.

**3d:** Nod 7 har valens 6, så minst 6 färger krävs. Det är lätt att hitta en bågärgning med 6 färger, så både övre och undre gräns är 6.

## Uppgift 4

**4a:** P0: LP-optimum:  $x_1 \approx 4.785$ ,  $x_2 \approx 0.285$ ,  $z = 31$ . Detta ger  $\bar{z} = 31$ . Vi förgrenar över  $x_1$ .

P1 = P0 + ( $x_1 \leq 4$ ).

P2 = P0 + ( $x_1 \geq 5$ ).

P1: LP-optimum:  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 0.6$ ,  $z = 28.8$ , vilket ger  $\bar{z} = 28.8$ . Förgrena över  $x_2$ .

P3 = P1 + ( $x_2 \leq 0$ ).

P4 = P1 + ( $x_2 \geq 1$ ).

P3: LP-optimum:  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 1$ ,  $z = 24$ . En tillåten heltalslösning, så vi får  $\underline{z} = 24$ . Spara lösningen och kapa grenen.

P4: LP-optimum:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 1$ ,  $z = 26$ . En tillåten heltalslösning, så vi får  $\underline{z} = 26$ . Spara lösningen och kapa grenen.

P2: LP-optimum:  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 0$ ,  $z = 30$ . En tillåten heltalslösning, så vi får  $\underline{z} = 30$ . Spara lösningen och kapa grenen.

Trädet avsökt. Optimallösning:  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 0$ ,  $z = 30$ . I ord: Köp fem rödavinbärsbuskar.

**4b:** Minsta två av varje sort,  $x_1 \geq 2$ ,  $x_2 \geq 2$ , skulle ge vänsterled  $\geq 14$  i bivillkor 2 som har högerled 11, så problemet skulle sakna lösning.

## Uppgift 5

**5a:** Det är ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 6, 7, 8 och 9 har udda valens. De gator som ska köras mer än en gång ska öka valensen med ett för dessa noder. Det kommer alltså att krävas minst två bågar. Det billigaste sättet att uppnå detta är med bågarna (6,8) och (7,9). Vi löser nu problemet genom att dubblera ovanstående bågar, och hitta en Eulertur i denna graf. Kostnaden för turen blir 127. En optimal tur är t.ex. 1-2-8-3-4-6-8-6-5-7-8-9-7-9-1. (Många andra möjligheter finns.)

**5b:** Det är ett handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 75.

Närmaste granne från nod 1, eller modifiering av 1-trädet, kan ge turen 1-2-8-3-4-6-5-

7-9-1, med kostnaden 81. Lösningen är alltså maximalt 6 enheter dyrare än optimum.

Ficklampan sparar honom  $127 - 81 = 46$  tidsenheter.

### Uppgift 6

**6a:** Efter första steget fås  $\alpha = (5, 4, 4, 8, 13)$  och  $\beta = (0, 0, 0, 0, 1)$ . Man kan inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får lösningen  $x_{11} = 1, x_{22} = 1, x_{33} = 1, x_{44} = 1, x_{55} = 1$ , och total kostnad blir 35. Optimal duallösning är  $\alpha = (5, 4, 4, 8, 13)$  och  $\beta = (0, 0, 0, 0, 1)$ . Summering av duallösningen ger 35, så starka dualsatsen är uppfylld.

**6b:** En lösning innehåller ett element i kolumn 1 och ett element i kolumn 5, Så kostnaden ökar med 3 och minskar med 3, dvs. blir oförändrad. Den primala optimallösningen blir oförändrad. I den duala optimallösningen fås  $\alpha$  oförändrat och  $\beta = (-3, 0, 0, 0, 4)$ .

### Uppgift 7

**7a:** Om grafen är ett träd finns ingen valfrihet och i princip inget att optimera. Alla förfäder till nutida Vlad måste undersökas. Om dåtida Vlad hittas som förfäder, avbrytes metoden. Annars måste metoden kontrollera samtliga kända förfäder i 40 generationer. Man behöver dock bara titta på varje nod en gång, så metoden har komplexitet  $O(n)$ , om  $n$  är antal noder i grafen (som ju är stor). Metoden har dock exponentiell komplexitet i antal generationer.

När det gäller minne, räcker det att markera om varje nod är uppnådd, om man vill veta *om* men inte *hur* de är släkt. Så en lista med samtliga noder torde räcka. (Men den blir ju lång.)

Det är ingen fördel att börja med dåtida Vlad och gå framåt i tiden, eftersom varje par sannolikt i medel har fler än två barn.

Algoritm: Låt nod 1 vara nutida Vlad, och markera honom som uppnådd. För varje uppnådd person i en generation, markera båda föräldrarna som uppnådda. Spara en lista med uppnådda, men ej undersökta noder.

**7b:** Det spelar ingen större roll. En viss nod kan då bli uppnådd på fler än ett sätt.