Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering, gk
Lösning till tentamen
2009-06-03

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna, x_4 och x_5, i basen. I den första iterationen blir x_1 inkommande. Valet av utgående variabel är inte unikt (x_4 eller x_5) Välj exempelvis den första, x_4 som utgående. I andra iterationen blir x_2 inkommande och x_5 utgående (kvot 0). Därefter fås optimum. Den optimala lösningen är $x_1 = 2, x_2 = 0$, $x_3 = 0$ med $z = 6$. Båda bivillkoren är aktiva. Baslösningen är degenererad eftersom en basvariabler är har värdet noll. Optimallösningen är inte unik eftersom $\hat{c}_3 = 0$ och x_3 är ickebasvariabel.

Om man väljer x_5 som utgående i första iterationen, fås i andra iterationen x_3 som inkommande och x_4 som utgående (kvot 0). Därefter fås optimum. Den optimala lösningen är $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0$ med $z = 6$. Båda bivillkoren är aktiva. Baslösningen är degenererad eftersom en basvariabler är har värdet noll. Optimallösningen är inte unik eftersom $\hat{c}_2 = 0$ och x_2 är ickebasvariabel.

(Om man skulle fortsätta att pivotera, skulle man komma till den alternativa optimallösningen $x_1 = 0, x_2 = 2$, $x_3 = 2$ med $z = 6$.)

1b: (LP-dualen följer helt standardform.) Dual optimallösning (grafiskt) är $y_1 = 1, y_2 = 1$ med $v = 6$. Samma lösning kan läsas ur optimaltablån. Eftersom målfunktionsraden inte ändras när man pivoterar mellan alternativa optimallösningar, ger alla optimaltablåer samma duallösning. Grafiskt är det tydligt att duallösningen är unik. Duala bivillkor 1 och 3 är aktiva. Komplementaritetsvillkoren är uppfyllda.

1c: Origo är en tillåten punkt i primalen. Slackvariablerna är basvariabler. I origo är inget av de två primala bivillkoren aktivt, så komplementaritet ger $y_1 = 0$ och $y_2 = 0$, med $v = 0$. Denna duala punkt är inte tillåten i dualen (inget av de tre duala bivillkoren är uppfyllt). Detta betyder att den primala punkten inte är optimal.

Uppgift 2

2a: Maximal flödesökande väg: 1-2-4-3-5, kapacitet 5. Skicka.
Maximal flödesökande väg: 1-3-4-5, kapacitet 3. Skicka.
Minsnitt (4,5), (3,5), med kapacitet 8 = maxflöde.

2b: Öka kapaciteten med enhet för en båge i minsnittet. Försök skicka mera. Notera om det går. (Ändra tillbaka.) Gör detta för varje båge i minsnittet, en i taget. Om maxflödet ökar varje gång, är minsnittet unikt.

Uppgift 3

3a: P0: Första LP-opt: $x_1 = 5/3$, $x_2 = 0$, $z = 35/3 \approx 11.67$. Detta ger $\bar{z} = 11$. (Valfritt: Avrundning ger den tillåtna lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, med $\underline{z} = 7$.)
Förgrena över x_1.
P2 ($x_1 \geq 2$): Saknar tillåten lösning. Kapa.
P1 ($x_1 \leq 1$): $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 10$. Heltalslösning, vilket ger $\underline{z} = 10$. Kapa.
Trädet avsökt. P1 ger optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 10$.

3b: Helt enkelt $0 \leq x_j \leq 1$ för $j = 1, 2$.

Uppgift 4

4a: Snabbaste väg: 1 - 3 - 5 - 7. Tid: 190. Använd Dijkstras metod.

4b: Maxhastighetsväg: 1 - 3 - 5 - 6 - 7. Hastighet: 50.

4c: Billigaste uppspännande träd: (1,2), (2,3), (3,4), (4,6), (6,5), (5,7). (Båge (6,5) kan bytas mot (6,7).) Kostnad: 240. Använd Kruskals eller Prims metod.

Uppgift 5

5a: Använd simplexmetoden för nätverk. Basträd (där $0 < x_j < u_j$): (1,2), (1,3), (3,4). Nodpriser (beräknade via basträdet): $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, $y_4 = 6$. Reducerade kostnader: $\hat{c}_{24} = 2 + 3 - 6 = -1 < 0$, vilket med $x_{24} = u_{24} = 1$ är optimalt.
$\hat{c}_{41} = -5 + 6 - 0 = 1 > 0$, men $x_{41} = u_{41} = 3$, så x_{41} bör minskas.

Inkommande variabel: x_{41}, minskas. Cykel: 1 - 4 - 3 - 1. Kontroll av gränser: $x_{41} = 3 - \theta \geq 0$ ger $\theta \leq 3$. $x_{13} = 2 - \theta \geq 0$ ger $\theta \leq 2$. $x_{34} = 2 - \theta \geq 0$ ger $\theta \leq 2$. Sätt $\theta = 2$ och välj x_{13} som utgående variabel. (x_{34} kan alternativt väljas.)

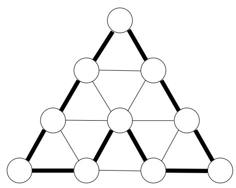
Nytt basträd: (1,2), (3,4), (4,1). Nodpriser (beräknade via basträdet): $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 3$, $y_4 = 5$. Reducerade kostnader: $\hat{c}_{24} = 2 + 3 - 5 = 0$, vilket optimalt (oavsett värdet på x_{24}). $\hat{c}_{13} = 4 + 0 - 3 = 1 > 0$, vilket med $x_{13} = 0$ är optimalt. Alla ickebasbågar optimala, så detta är optimum.

5b: Reducerad kostnad: $\hat{c}_{32} = c_{32} + 3 - 3 = c_{32}$. Om $\hat{c}_{32} < 0$ fås x_{32} som inkommande variabel, dvs. förändrad optimallösning. Svar: Optimallösningen förändras om $c_{32} < 0$.

Uppgift 6

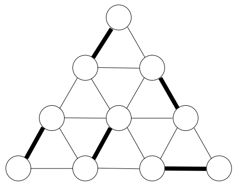
6a: Ja, alla noder har jämn valens. (Man behöver inte hitta någon cykel.)

6b: Ja. Bevisa genom att hitta en.

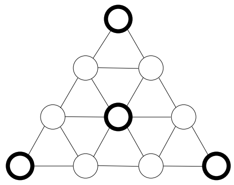


6c: Ja.

6d: Nej, det finns cykler med tre noder.

6e: Ja. Bevisa genom att hitta en. 

6f: Tre noder.

6g: Ja. Bevisa genom att hitta en. 

6h: Mittnoden har valens sex, så det krävs minst sex färger. Det finns en bågfärgning med precis sex färger.

6i: Eftersom grafen är plan, ska det inte krävas mer än fyra färger. Men det räcker faktiskt med tre färger. (En av färgerna kan vara den oberoende nodmängden ovan.)

6j: Nej, den enkla snitt-flyttar-heuristiken ger ett bättre snitt direkt.

6k: Polynomiska: a, e. *NP*-fullständiga: b, f.