Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering, gk
Lösning till tentamen
2010-01-12

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Ja, grafisk lösning ger optimum i skärningen mellan de två bivillkoren.

1b: Starta med slackvariablerna, x_4 och x_5, i basen. I den första iterationen blir x_1 inkommande, och x_4 utgående. I andra iterationen blir x_2 inkommande och x_3 utgående. Därefter fås optimum. Den optimala lösningen är $x_1 = 1, x_2 = 4$ med $z = 11$.

1c: Skuggpriser (dual optimallösning) är $y_1 = 1$ och $y_2 = 1$ (kan läsas ur optimaltablån i 1b). Båda villkoren ger samma förtjänst. (Annars hade vi tagit den som har störst skuggpris.)

1d: Ändring av c_2 med δ ger reducerade kostnader $\hat{c}_3 = -1 - 2\delta$ och $\hat{c}_4 = -1 + \delta$. Baslösningen är optimal om $\hat{c} \leq 0$, vilket är uppfyllt om $-0.5 \leq \delta \leq 1$ (dvs. om $1.5 \leq c_2 \leq 3$).

För att få x_2 ut ur optimalbasen krävs (givetvis) att c_2 minskar. I optimaltablån ser man att x_2 blir utgående om $\delta \leq -0.5$ (dvs. $c_2 \leq 1.5$).

1e: LP-relaxationen av P2 är P1, vilket har en heltalig lösning, se uppgift 1b. Relaxation av heltalskraven ger alltså att de automatiskt blir uppfyllda, vilket bevisar att lösningen är optimal i heltalsproblemet.

1f: P0: Första LP-opt: $x_1 = 0.5$, $x_2 = 2$, $z = 5.5$. Detta ger $\bar{z} = 5$. (Valfritt: Avrundning neråt ger den tillåtna lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, med $\underline{z} = 4$.)
Förgrena över x_1.
P1 ($x_1 \leq 0$): $x_1 = 0$, $x_2 = 2.5$, $z = 5$. Förgrena över x_2.
P3 ($x_2 \leq 2, x_1 \leq 0$): $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $z = 4$. Heltalslösning, vilket ger $\underline{z} = 4$. Kapa.
P4 ($x_2 \geq 3, x_1 \leq 0$): Saknar tillåten lösning. Kapa.
P2 ($x_1 \geq 1$): $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 5$. Heltalslösning, vilket ger $\underline{z} = 5$. Kapa.
Trädet avsökt. Optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 5$.

1g: Ett Gomory-snitt kan bara göras på en rad med ett icke-heltaligt högerled, så vi väljer sista raden i optimaltablån, vilket är ekvationen $x_1 - x_3 + x_4 = 0.5$. Gomory-snittet fås genom att avrunda samtliga koefficienter neråt, vilket ger $x_1 - x_3 + x_4 \leq 0$. För att se hur detta egentligen ser ut, löser vi ut slackvariablerna, $x_1 - (5 - x_1 - x_2) + (6 - 2x_1 - x_2) \leq 0$, vilket kan förenklas till $1 \leq 0$. Detta går aldrig att uppfylla. Men vi vet ju att problemet inte saknar tillåten lösning. Varför blir det fel?

För att ett Gomory-snitt skall vara giltigt, krävs att *samtliga* variabler ska vara heltal. (Annars får man inte avrunda högerledet neråt.) Men vi hade ett icke-heltaligt högerled i bivillkor 1, så slackvariabel x_3 behöver inte vara heltal, och olikheten är inte giltig.

(Bivillkoret $x_1 + x_2 \leq 2.5$ kan dock skärpas till $x_1 + x_2 \leq 2$ eftersom både x_1 och x_2 ska vara heltal. Detta skulle ge heltaligt LP-optimum direkt.)

1h: Bara bivillkor 2 är aktivt i optimum, men en liten ökning av detta högerled (så att $3 < b_2 < 4$) skulle bara ge ytterligare förgrening i nod P2, utan att ändra heltalsoptimum. Men en större ändring av något av högerleden kan ändra lösningen, så definitionen av skuggpris är inte användbar för heltalsproblem.

Uppgift 2

2a: Billigaste väg: 1 - 2 - 4 - 5. Kostnad: 10. Använd Dijkstras metod.

2b: Vi fick nodpriserna $y_2 = 3$ och $y_5 = 10$, och för att (2,5) ska ingå i lösningen krävs att $c_{25} \leq y_5 - y_2$, dvs. $c_{25} \leq 7$.

2c: Bågarna (1,2), (2,4), (4,5) och (1,3) måste ingå i basträdet. Detta ger nodpriserna (beräknade via basträdet) $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, $y_4 = 7$, $y_5 = 10$, vilket ger reducerade kostnaderna $\hat{c}_{25} = c_{25} + y_2 - y_5 = 8 + 3 - 10 = 1 > 0$, $\hat{c}_{34} = c_{34} + y_3 - y_4 = 4 + 4 - 7 = 1 > 0$, $\hat{c}_{35} = c_{35} + y_3 - y_5 = 7 + 4 - 10 = 1 > 0$. Samtliga reducerade kostnader är positiva, och flödet i bågarna (2,5) och (3,4) är noll, vilket är optimalt. Men flödet i båge (3,5) är maximalt, och bör minskas. Vi får x_{35} som inkommande variabel (minskning). Cykel: 5 - 3 - 1 - 2 - 4 - 5. Kontroll av gränser: $x_{35} = 2 - \theta \geq 0$ ger $\theta \leq 2$. $x_{13} = 2 - \theta \geq 0$ ger $\theta \leq 2$. $x_{12} = 8 + \theta \leq 11$ ger $\theta \leq 3$. $x_{24} = 8 + \theta \leq 11$ ger $\theta \leq 3$. $x_{45} = 8 + \theta \leq 11$ ger $\theta \leq 3$. Sätt $\theta = 2$ och välj x_{35} som utgående variabel. x_{13} kan alternativt väljas, men att direkt plocka ut den inkommande $_{35}$ är smartare, eftersom vi får samma basträd, samma nodpriser och samma reducerade kostnader. Enda skillnaden är nu att båge (3,5) har flöde noll, så allt är nu optimalt.

2d: Maximal flödesökande väg: 1-3-5, kapacitet 4. Skicka.
Maximal flödesökande väg: 1-2-5, kapacitet 3. Skicka.
Minsnitt (1,2), (1,3), med kapacitet 7 = maxflöde. Båge (1,2) eller (1,3) bör väljas när det gäller kapacitetsökning. Det är säkert att maxflödet minskar om man minskar kapaciteten på en båge i minsnittet, men det är inte säkert att maxflödet ökar om man ökar kapaciteten på en båge i minsnittet, eftersom det kan finnas fler minsnitt (med samma kapacitet).

Uppgift 3

3a: Om n är udda så har alla noder jämn valens, och en Eulercykel finns. Om n är jämn så har alla noder udda valens, och en Eulercykel kan inte finnas.

3b: Ja. (Ta noderna i vilken ordning som helst.)

3c: För $2 \leq n \leq 4$ är grafen plan. För $n \geq 5$ är den inte det.

3d: För $n = 2$, ja, men för $n \geq 3$ finns cykler med tre noder, så grafen är inte tudelad.

3e: Om n är jämn, ja. (Trivialt.) Om n är udda kan ingen perfekt matchning finnas.

3f: Nej, inte ens med två. (Alla noder är förbundna med varandra.)

3g: Nej, det krävs n färger. (Av samma skäl som ovan.)

3h: Om k noder ligger på ena sidan snittet, går det $n-k$ bågar över snittet från varje nod, dvs. totalt $k(n-k) = kn - k^2$ stycken. Genom att derivera m.a.p. k ser man att maximum ligger i $n = 2k$. (Om n inte är jämn, spelar det ingen roll om man avrundar uppåt eller neråt.) Detta indikerar att svaret är ja, men duger inte riktigt som bevis. Det är *NP*-fullständigt att kontrollera om det finns en bättre lösning för detta problem.

Uppgift 4

4a: LP-dualen är ett tillordningsproblem, dvs. lösningen är en matris med en etta i varje rad och en etta i varje kolumn.

4b: Ja.

4c: Använd Ungerska metoden. $\hat{c}_{ij} = c_{ij} - \alpha_i - \beta_j$. Starta med $\alpha = 0$ och $\beta = 0$. Sätt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, vilket ger $\hat{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Sätt sedan $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 2$, vilket ger $\hat{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. En tillåten lösning fås nu av $x_{13} = 1$, $x_{22} = 1$,$x_{31} = 1$.

Uppgift 5

5a: Summan av vikterna är 47, så minst $\lceil 47/10 \rceil = 5$ hinkar krävs.

5b: Bästa plats och första plats ger båda följande lösning:
Hink 1: 3, 6.
Hink 2: 7, 3.
Hink 3: 4.
Hink 4: 8.
Hink 5: 9.
Hink 6: 7.

5c: Sortering ger ordningen 9, 8, 7, 7, 6, 4, 3, 3. Bästa plats och första plats ger båda följande lösning:
Hink 1: 9.
Hink 2: 8.
Hink 3: 7, 3.
Hink 4: 7, 3.
Hink 5: 6, 4.

Lösningen använder 5 hinkar, så detta är optimum (ty uppgift a gav undre gränsen 5).