Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering, gk
Lösning till tentamen
2010-05-31

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Den angivna lösningen ger basbågarna (1, 4), (3, 2) och (3, 4). Nodpriserna blir då $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 0$, $y_4 = 3$ och den reducerade kostnaden blir $\hat{c}_{12} = -4$, så x_{12} blir inkommande variabel. Cykeln blir $1 - 2 - 3 - 4 - 1$ (där bågarna (3, 2) och (1, 4) används bakåt), och i den kan man skicka maximalt 3 enheter. Utgående variabel blir då x_{14}. Ny lösning blir $x_{12} = 3$, $x_{32} = 2$, $x_{34} = 4$. Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -4$, $y_4 = -1$, och den reducerade kostnaden blir $\hat{c}_{14} = 4$, så vi har optimum. Totalkostnaden blir 25.

1b: Utgå från den optimala lösningen i uppgift a och skicka ytterligare en enhet *via basträdet*, vilket ger $x_{12} = 4$, $x_{32} = 1$, $x_{34} = 5$. Eftersom vi har oförändrad bas, blir nodpriser och reducerad kostnad samma som tidigare, så vi har optimum. Totalkostnaden blir 24, så den har *minskat.* (Att man kan skicka mer till lägre kostnad kallas ibland “transportparadoxen”.)

1c: Av de fyra bågarna ska tre vara basbågar, vilket ger fyra möjligheter. Två av dem dök upp i uppgift a, nämligen (1, 4), (3, 2), (3, 4) och (1, 2), (3, 2), (3, 4). Det visar sig att de andra två möjligheterna inte blir tillåtna på grund av käll-/sänkstyrkorna.

Uppgift 2

2a: Första bivillkoret visar att målfunktionsvärdet inte kan överstiga 5. Enda sättet att ha ett optimalt målfunktionsvärde som är lägre än 5 är att första bivillkoret är redundant, dvs. ligger helt utanför det tillåtna området. Det är lätt att visa att så inte är fallet, t.ex. grafiskt.

2b: Starta med slackvariablerna, x_3 och x_4, i basen. I den första iterationen blir x_1 inkommande och x_4 utgående. I andra iterationen blir x_2 inkommande och x_3 utgående. Därefter fås optimum. Den optimala lösningen är $x_1 = 1/2, x_2 = 1$ med $z = 5$. Dual optimallösning (skuggpriser) är $y_1 = 1$ och $y_2 = 0$.

2c: I optimaltablån har vi $\hat{c}_4 = 0$ trots att x_4 inte ingår i basen. Optimallösningen är därför inte unik. Välj x_4 som inkommande variabel, vilket ger x_1 som utgående variabel. Detta ger en alternativ optimallösning: $x_1 = 0, x_2 = 5/3$. En optimallösning som inte är extrempunkt fås av en konvexkombination av de två optimallösningarna, t.ex. medelvärdet: $x_1 = 1/4, x_2 = 4/3$.

2d: LP-dual:

$$\begin{array}{llrcrcl} \min & v = & 5y_1 & + & 4y2 & & \\ \text{då} & & 4y_1 & + & 4y_2 & \geq & 4 \\ & & 3y_1 & + & 2y_2 & \geq & 3 \\ & & y_1, & & y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Uppgift 3

3a: Billigaste uppspännande träd-problem, lös med Kruskal eller Prims metod. Lösning: (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 5). Kostnad: 13.

3b: Handelsresandeproblem, NP-svårt.

3c: 1-träd: (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 5). Kostnad: 18, dvs. rundan blir minst 18 lång.

3d: Jesper bygger upp turen med noderna i ordningen 1, 3, 2, 4, 5, men sedan finns ingen väg hem igen, så heuristiken misslyckas med att hitta en tur (ty grafen är inte fullständig).

3e: Eftersom nod 1 måste vara med, måste bågarna (1, 2) och (1, 3) vara med. Eftersom nod 5 måste vara med, måste bågarna (2, 5) och (4, 5) vara med. Nu är redan två bågar till nod 2 medtagna, så bågarna (2, 3) och (2, 4) får inte vara med. Slutligen kräver både nod 3 och nod 4 att båge (3, 4) är med. Nu är allt fixerat, och vi har en handelsresandetur. Det finns alltså bara en.

3f: Kinesiska brevbärarproblemet. Endast nod 3 och 4 har udda valens, och det billigaste sättet att åtgärda detta är att dubblera båge (3, 4). Snöplogen ska alltså köra båge (3, 4) två gånger och alla andra bågar en gång. Exempel på lösning: $1-3-4-5-2-3-4-2-1$.

3g: Nodfärgning. Grafen innehåller K_3, så minst tre färger krävs. Nod 1 och 4 kan ha samma färg, och nod 3 och 5 kan ha samma färg, så tre färger räcker.

3h: Bågfärgning. Nod 2 har valens 4, så minst fyra färger krävs, och man kan lätt hitta en tillåten lösning med fyra färger.

3i: Maxsnittsproblemet. En bra lösning är nod 2 och 4 på ena sidan snittet.

3j: Billigaste väg. (Att grafen är oriktad kan åtgärdas genom att införa dubbla motriktade bågar.) Dijkstras metod ger billigaste väg $1-2-5$. Optimalitetsbeviset är nodpriserna, som visar att man inte kan komma till någon nod på ett billigare sätt.

3k: Dyraste enkla väg. Om man glömmer att kräva att vägen ska vara enkel fastnar man (dvs. Fords metod) i en positiv cykel, som kan bli hur lång som helst, så fru Jensen kommer aldrig fram. Problemet är NP-svårt.

3l: Bivillkoren är att varje nod ska ha valens 2:

Nod 1: $x_{12} + x_{13} = 2$ (1)
Nod 2: $x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 2$ (2)
Nod 3: $x_{13} + x_{23} + x_{34} = 2$ (3)
Nod 4: $x_{24} + x_{34} + x_{45} = 2$ (4)
Nod 5: $x_{25} + x_{45} = 2$ (5)

Bivillkor 1 ger $x_{12} = 1$ och $x_{13} = 1$. Bivillkor 5 ger $x_{25} = 1$ och $x_{45} = 1$. Bivillkor 2 säger nu $1 + x_{23} + x_{24} + 1 = 2$, dvs. $x_{23} = 0$ och $x_{24} = 0$. Bivillkor 3 säger nu $1+0+x_{34} = 2$, vilket ger $x_{34} = 1$. Bivillkor 4 är nu uppfyllt och lösningen helt fixerad. Resultatet är alltså precis detsamma som i uppgift e. Man kan tillägga att detta visar att den enda lösningen där alla noder har valens 2 är en handelsresandetur. (Så är det vanligtvis inte.)

Uppgift 4

4a: P0: Första LP-opt: $x_1 = 0$, $x_2 = 3/2$, $z = 3/2$. Detta ger $\underline{z} = 2$ (ty min-problem). Avrundning neråt ger ingen tillåten lösning. Avrundning uppåt ger ingen tillåten lösning.
Förgrena över x_2.
P1 ($x_2 \leq 1$): $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1$, $z = 5/3$, vilket ger $\underline{z} = 2$. Avrundning neråt ger ingen tillåten lösning. Avrundning uppåt ger tillåten lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 3$, vilket ger $\bar{z} = 3$.
Förgrena över x_1.
P3 ($x_1 \leq 0, x_2 \leq 1$): Saknar tillåten lösning. Kapa.
P4 ($x_1 \geq 1, x_2 \leq 1$): $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $z = 2$. Heltalig lösning, $\bar{z} = 2$. Kapa.
P2 ($x_2 \geq 2$): $\underline{z} = \bar{z}$. (Saknar tillåten lösning.) Kapa.
Trädet avsökt. Optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $z = 2$.

4b: Det konvexa höljet ges av fasetterna $x_1 \geq 1$, $x_1 + x_2 \leq 2$, $x_2 \geq 0$.