Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering, gk
Lösning till tentamen
2010-08-26

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte säkert tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna, x_3, x_4 och x_5, i basen. I den första iterationen blir x_1 inkommande och x_5 utgående. I andra iterationen blir x_3 inkommande och x_6 utgående. Därefter fås optimum. Den optimala lösningen är $x_1 = 1/2, x_2 = 0, x_3 = 1$ (och $x_4 = 1/2, x_5 = 0, x_6 = 0$) med $z = 5$. Bivillkor 2 och 3 är aktiva.

1b: Ta t.ex. tre av punkterna som passerades i 1a: (0, 0, 0), (1/2, 0, 0) och (1/2, 0, 1/2).

1c: Nej, ty $\hat{c}_2 = -3/2$ vilket skulle ändras till $\hat{c}_2 = -1/2$, vilket inte ändrar optimum.

1d: (Standardform.) $y_1 = 0, y_2 = 3/2, y_3 = 1$.

Uppgift 2

2a: Markera tillåtna riktningar och sök väg med Dijkstras modifierade metod. Man kan skicka 2 enheter till vägen 1 - 3 - 2 - 4 - 5 - 6 - 7. Minsnitt blir (2, 4) och (3, 4).

2b: Lösningen i 2a ger basbågarna (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (6, 5), (6, 7). Nodpriserna blir då $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$, $y_4 = 14$, $y_5 = 21$, $y_6 = 17$, $y_7 = 24$, och de reducerade kostnaderna blir $\hat{c}_{12} = -1$, $\hat{c}_{34} = 0$, $\hat{c}_{45} = 1$, $\hat{c}_{67} = 0$, så x_{45} blir inkommande variabel, att minskas. Cykeln blir $4-6-5-4$ (där bågarna (4, 5) och (5, 6) används bakåt), och i den kan man skicka maximalt 3 enheter. Utgående variabel blir då x_{46}. Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$, $y_4 = 14$, $y_5 = 22$, $y_6 = 18$, $y_7 = 25$, och de reducerade kostnaderna blir $\hat{c}_{12} = -1$, $\hat{c}_{34} = 0$, $\hat{c}_{46} = -1$, $\hat{c}_{67} = 0$, vilket indikerar optimum.

2c: Använd Dijkstras metod, vilken ger vägen 1 - 2 - 4 - 5 - 7, med kostnad 23.

Uppgift 3

3a: Använd Kruskals eller Prims metod. Kostnad 17.

3b: Kostnad för 1-träd: 22, så $\underline{z} = 22$. I lösningen har nod 4 valens 3. Förgrena över nodvalens (fokusera på bågar i lösningen):
P1: Förbjud båge (1, 4).
P2: Förbjud båge (3, 4), tvinga med (1, 4).
P3: Förbjud båge (4, 5), tvinga med (1, 4) och (3, 4), förbjud (2, 4).
P1 ger ett 1-träd med kostnad 23, ej handelsresandetur.
P2 ger ett 1-träd med kostnad 23, ej handelsresandetur.

P3 ger ett 1-träd med kostnad 25, handelsresandetur.
Detta ger undre gränsen 23 och övre gränsen 25.

3c: Endast nod 1 och 3 har udda valens. Billigaste vägen mellan dem är 1 - 4 - 3. Dubblera dessa bågar, och finn en Eulertur. Kostnad 63.

3d: Variant 1: Utgå från MST, ta bort nod 3, ty den har valens ett. Ger kostnad 11.
Variant 2: Finn billigaste väg till närmaste av nod 1, 2, 4. Upprepa. Ger kostnad 9.

3e: Dra först bort minsta element från varje rad, sedan från varje kolumn. Stryk sedan nollorna med 4 streck, och dra bort minsta ostrukna element från alla ostrukna och lägg till till alla dubbelt strukna. Detta måste görs två gånger, sedan krävs fem streck. Den erhållna tillordningen (inte unik) är 1 - 2, 2 - 1, 3 - 4, 4 - 5, 5 - 3. Detta ger två små cykler: 1 - 2 - 1 och 3 - 4 - 5 - 3, samt kostnaden 25, vilket är en undre gräns.

Förgreningen kan då t.ex. vara att förbjuda båge (1, 2) i ena grenen och (2, 1) i andra.

Uppgift 4

4a: Den givna lösningen ger $\underline{z} = 6$.
P0: Första LP-opt: $x_1 = 5/8$, $x_2 = 5/4$, $z = 10$. Detta ger $\bar{z} = 10$. (Avrundning neråt ger lösningen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $z = 5$.)
Förgrena över x_1:
P1 ($x_1 \leq 0$): $x_1 = 0$, $x_2 = 5/3$, $z = 25/3$, vilket ger $\bar{z} = 8$.
Förgrena över x_2:
P3 ($x_2 \leq 1, x_1 \leq 0$): $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $z = 5$. Kapa, ty $z < \underline{z}$.
P4 ($x_2 \geq 2, x_1 \leq 0$): Saknar lösning. Kapa.
Backa: P2 ($x_1 \geq 1$): $x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$, $z = 17/2$, vilket ger $\bar{z} = 8$.
Förgrena över x_2:
P5 ($x_2 \leq 0, x_1 \geq 1$): $x_1 = 5/4$, $x_2 = 0$, $z = 15/2$, vilket ger $\bar{z} = 7$.
Förgrena över x_1:
P7 ($x_1 \leq 1, x_2 \leq 0, x_1 \geq 1$): $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $z = 6$. Kapa.
P8 ($x_1 \geq 2, x_2 \leq 0, x_1 \geq 1$): Saknar lösning. Kapa.
Backa: P6 ($x_2 \geq 1, x_1 \geq 1$): Saknar lösning. Kapa. Trädet avsökt. Ingen bättre lösning funnen.

4b: Studera ett bivillkor i taget och kom ihåg heltalskravet. Minimal övertäckning ger bivillkoret $x_1 + x_2 \leq 1$. Om man lägger till det, fås heltalsoptimum i P0, dvs. inga förgreningar behöver göras.