Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Kombinatorisk optimering, gk
Lösning till tentamen
2011-01-14

Svar och kortfattade lösningar

(Dessa lösningar kan användas för att kontrollera huruvida man har rätt svar. De är dock inte tillräckligt detaljerade för att ge full poäng på tentan.)

Uppgift 1

1a: Optimum efter en iteration: $x_1 = 5/2, x_2 = 0, x_3 = 0, z = 5$, bivillkor 1 aktivt, bivillkor 2 ej aktivt.

1b: Dualt optimum: $y_1 = 1, y_2 = 0, v = 5$, duala bivillkor 1 aktivt, duala bivillkor 2 och 3 ej aktiva.

1c: I: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$, villkor 1 och 2 ej aktiva, $y_1 = 0, y_2 = 0$, ej tillåten.
II: $x_1 = 5/2, x_2 = 0, x_3 = 0$, $y_1 = 1, y_2 = 0$, tillåten.
III: Ta $y_1 = 0, y_2 = 2$, duala bivillkor 1 aktivt, duala bivillkor 2 och 3 ej aktivt. $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0$, ej tillåten. (Ej optimal.)

1d: Duala bivillkor 2 och 3 är redundanta, så x_2 och x_3 kommer aldrig med i optimalbasen.

1e: $c_3 \leq 1$.

1f: P0: LP-opt enligt ovan,$\bar{z} = 5$. Förgrena över x_1.
P1: P0 + ($x_1 \leq 2$): $x_1 = 2, x_2 = 1/3, x_3 = 0, \bar{z} = 13/3$. Förgrena över x_2.
P3: P1 + ($x_2 \leq 0$): $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, \bar{z} = 4$. Tillåten heltalslösning, $\underline{z} = 4$.
P4: P1 + ($x_2 \geq 1$): Kapa, ty $\lfloor \bar{z} \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = 4 = \underline{z}$.
P2: P0 + ($x_1 \geq 3$): Saknar tillåten lösning. Kapa.
Problemet löst. Optimum: $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, z = 4$.

Uppgift 2

2a:

$$
\begin{array}{lllll}
\min & \displaystyle\sum_{(i,j)\in B} c_{ij}x_{ij} & & & \\
\text{då} & \displaystyle\sum_{i\in N} x_{ij} & \geq & 3 & \forall j \in N \\
& \displaystyle\sum_{i\in S}\sum_{j\in N\setminus S} x_{ij} & \geq & 1 & \forall S \subset N \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & & & \forall (i,j) \in B
\end{array}
$$

2b: Summera nodvalens: $v \geq 3|N|$. Antag m bågar i lösningen $\Rightarrow v = 2m$, så $m \geq 3|N|/2$.

2c: T ex: Börja med noderna med lägst valens. För varje nod, lägg till billigaste bågarna så att valensen blir tre. Ta hänsyn till redan medtagna bågar. Om kostnaderna är lika, välj båge till nod som har för låg valens. Om lösningen inte är sammanhängande, lägg till billigaste bågarna så att den blir det.

$m \geq 3|N|/2 = 9$. Om heuristiken ger en lösning med 9 bågar (vilket är möjligt), så är det optimum.

Uppgift 3

3a: Man får följande väg: 1 - 4 - 7 - 8, kostnad 24. Nodpriser: $y_1 = 0, y_2 = 10, y_3 = 10, y_4 = 10, y_5 = 11, y_6 = 11, y_7 = 11, y_8 = 24$.

3b: Korrekt billigaste väg: 1 - 2 - 5 - 3 - 6 - 4 - 7 - 8, kostnad 20. Nodpriser: $y_1 = 0, y_2 = 10, y_3 = 8, y_4 = 6, y_5 = 11, y_6 = 9, y_7 = 7, y_8 = 20$.

3c: Grafen är acyklisk. Undersök noderna i en ordning som gör att inga "bakåtbågar" finns. Kör metoden för acykliska nätverk. (Det spelar ingen roll att det finns negativa kostnader.)

3d: $c_{58} \leq y_8 - y_5 = 20 - 11 = 9$.

Uppgift 4

4a: Simplex i nätverk: Iteration 1: Skicka flöde 2 i cykeln 2 - 3 - 1 - 4 - 2.
Iteration 2: Optimum. Nollflödet är alltså inte optimalt.

4b: Ja.

Uppgift 5

5a: Flöde 20. Snitten har kapacitet 23, 29 och 24. Då vet vi att $20 \leq f \leq 23$.

5b: Flödesökande väg: 1 - 2 - 4 - 3 - 5 - 6, skicka 2 enheter. Maxflöde: 22. Minsnitt: Mellan $S = \{1, 2, 4\}$ och resten.

Uppgift 6

6a: MST: Kostnad: 46.

6b: 1-träd: Kostnad: 57.

6c: Närmaste-granneheuristiken ger turen 1 - 2 - 3 - 6 - 5 - 4, med kostnad 68. Nu vet vi att $57 \leq z^* \leq 68$.

6d: Bara nod 4 och 6 har udda valens, så båge (4, 6) ska trafikeras två gånger. (Det finns ingen billigare väg mellan dessa noder än direktbågen.)

6e: Se till att alla bågar till sista noden är mycket dyra.

6f: $O(n)$.