Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS för D och C

Datum:	31 maj 2011
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	4
Antal sidor:	4
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

I följande LP-problem anger x_j hur många kg av produkt j man ska producera. Målfunktionen anger vinsten, och bivillkoren anger tillgänglig kapacitet för tre maskiner som bearbetar produkterna.

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 4 & (1) \\
& & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq & 6 & (2) \\
& & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 4 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös problemet med simplexmetoden. (2p)

b) Ange bivillkorens skuggpriser. Hur mycket ökar vinsten om kapaciteten hos maskin 1 ökas med 2 enheter? Hur mycket ökar vinsten om kapaciteten hos maskin 2 ökas med 2 enheter? (Antag att dessa ändringar inte förändrar skuggpriset.) (1p)

c) Vinsten för produkt 2 ändras oväntat från 2 till 4. Uppdatera optimaltablån från uppgift a (dvs. beräkna korrekt $\hat{c}_2$ och för in i tablån). Fortsätt med simplexmetoden från den tablån. Ange ny optimallösning. (3p)

d) Finns det någon tillåten baslösning där man tillverkar produkt 2 och maskin 2 har kapacitet över (dvs. där x_2 och x_5, slackvariabeln i det andra bivillkoret, är basvariabler)? (Göm inte att motivera.) (1p)

e) Formulera LP-dualen till problemet i uppgift a. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift a. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

f) Man funderar på att kräva att varje produkt enbart får tillverkas i hela kg, eftersom det skulle förenkla hanteringen. Inför detta krav. Man antar också att produkt 1 är så dålig att den inte ska produceras, så den kan tas bort från problemet. Utgå från LP-lösningen i uppgift a och lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. Problem i två dimensioner får lösas grafiskt. (3p)

g) I problemet ovan är ett bivillkor redundant. Visa detta. Om man tar bort det redundanta bivillkoret i primalen, försvinner en av variablerna i dualen. Studera den återstående dualen grafiskt och avgör om några av de duala bivillkoren är redundanta. Vad innebär i så fall det? Förklara även grafiskt varför man får en ändrad optimallösning i uppgift c. (4p)

Uppgift 2

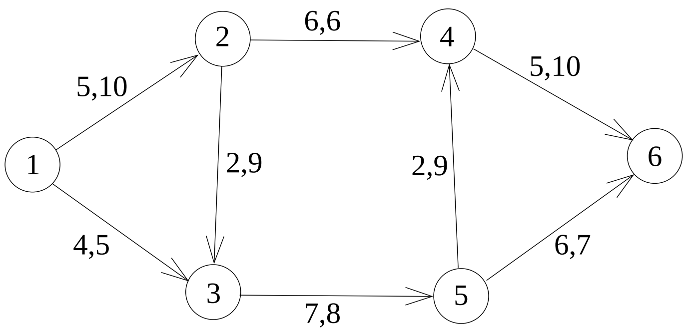
Symmetrier i indata kan ibland göra vissa problem lättare att lösa och ibland svårare. Betrakta i detta exempel tillordningsproblemet. Svaren skall motiveras genom att lösa ett exempel med angivna kostnader av storlek 4×4.

a) Gör kostnaderna $c_{ij} = i + j$ att det blir lättare eller svårare? (Detta betyder t.ex. att $c_{23} = 2 + 3 = 5$.) (2p)

b) Gör kostnaderna $c_{ij} = i * j$ att det blir lättare eller svårare? (Detta betyder t.ex. att $c_{23} = 2 * 3 = 6$.) (3p)

Uppgift 3

Bågarna i nedanstående nätverk är märkta med kostnad per enhet och kapacitet (övre gräns). Alla bågar har undre gräns noll.



a) Ignorera kostnaderna och finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med flödet noll i alla bågar. Ange minsnitt. (3p)

b) Betrakta minkostnadsflödesproblemet att skicka 10 enheter från nod 1 till nod 6 i ovanstående nätverk på billigaste sätt. Starta med flödet 5 enheter vägen 1 - 2 - 4 - 6 och 5 enheter vägen 1 - 3 - 5 - 6. Använd simplexteknik för att finna optimallösningen. (3p)

c) Ignorera bågkapaciteterna och finn billigaste väg från nod 1 till nod 6 och från nod 1 till nod 5. Ange optimal duallösning. (2p)

d) Betrakta problemet i uppgift c. Ändra de två bågkostnaderna c_{23} och c_{54} från 2 till -2. Starta från lösningen i uppgift c och finn billigaste väg från nod 1 till nod 6 med Fords metod. (2p)

e) Betrakta det oriktade handelsresandeproblem som fås genom att ignorera bågkapaciteterna samt bågarnas riktning. Grafen är inte fullständig, men det är tillåtet att lägga till nya bågar, vilka då får kostnaden 100. Finn billigaste 1-träd som relaxation av handelsresandeproblemet. Finn därefter en tillåten handelsresandetur med en enkel heuristik (t.ex. närmaste-granne). Vilka gränser på kostnaden för den optimala handelsresandeturen fås? (3p)

Uppgift 4

Betrakta kappsäcksproblemet

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrl} \max & z = & 6x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 5x_4 & & \\ \text{då} & & 10x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 7x_4 & \leq & 19 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

a) Man kan lösa problemet approximativt genom att konstruera en approximation till bivillkoret genom att “avrunda” koefficienterna till någon gemensam nämnare och sedan dividera med denna. (Det kan också kallas trunkering.) Gör detta i exemplet genom att avrunda alla koefficienter i bivillkoret (inkl högerled) till närmaste 10-tal och sedan dividera bort 10. Lös sedan problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. (Ledning: Det blir inte speciellt många förgreningar.) Kontrollera om den erhållna lösningen är tillåten. (2p)

b) Lös LP-relaxationen till det ursprungliga problemet ovan. Försök få en tillåten lösning genom avrundning. Ange övre och undre gränser på det optimala målfunktionsvärdet. (Använd även information från uppgift a.)

Ta fram en minimal övertäckning vars giltiga olikhet skär bort LP-lösningen. (3p)