Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS för D och C

Datum:	26 augusti 2011
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	4
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Mixomax AB tillverkar tre olika produkter, benämnda Ding 1, Ding 2 och Ding 3, för den tyska marknaden. Man vill planera produktionen för månaden juli. Eftersom nästan all personal har semester i juli, vill man ställa in maskinerna för en viss produktion i slutet av juni, för att sedan låta fabriken arbeta nästan obemannad i en månad. Under den tiden kan man inte ändra produktmixen.

Man får använda högst 5 enheter av råvaran Stoff A per timme. Produktion av en enhet kräver 3 enheter av Stoff A för Ding 1, 1 enhet för Ding 2 och 4 enheter för Ding 3. Ett visst oönskat ämne, Verunreinigung B, uppstår vid produktionen, och mängden får inte överskrida 3 volymenheter (v.e.) per timme. Produktion av en enhet Ding 1 ger 2 v.e. av ämnet, produktion av en enhet Ding 3 ger också 2 v.e. av ämnet, medan produktion av en enhet Ding 2 faktiskt förbrukar en v.e. av ämnet. Dessutom har man i ett kontrakt med firma Merkel AG förbundet sig att inte tillverka mer än två enheter av Ding 1 och 2 tillsammans under en timme. Vinsten per enhet är 2 kr för Ding 1, 5 kr för Ding 2 och 4 kr för Ding 3. Man formulerar problemet att maximera vinsten för en timme under ovanstående bivillkor som följande LP-problem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 5 & \qquad (1)\\
 & & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3 & \qquad (2)\\
 & & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2 & \qquad (3)\\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös problemet ovan med simplexmetoden. Ange optimallösning samt vilka bivillkor som är aktiva. (3p)

b) Hur mycket ökar vinsten om en enhet till av Stoff A kan användas per timme? Hur mycket ökar vinsten om ytterligare en v.e. av Verunreinigung B tillåts per timme? Hur mycket ökar vinsten om man får göra 3 enheter av Ding 1 och 2? (Beakta en av dessa ändringar i taget, och antag att ändringarna inte förändrar skuggpriserna. Använd resultatet i uppgift a.) (3p)

c) Miljödepartementet skickar ut en remiss där man frågar vilka följder en skärpning av utsläppskraven för Verunreinigung B skulle ge. Utgångspunkten för Mixomax AB är att optimallösningen inte får försämras alls. Hur mycket kan man gå med på att sänka gränsen för utsläpp per timme? (1p)

d) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift a. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

e) Välj ett av de primala villkoren som inte är aktivt i optimallösningen i uppgift c. Om det finns flera inaktiva villkor, välj det som ligger längst ifrån att vara aktivt (genom att beakta slackvariablernas storlek). Bortse från detta bivillkor i modellen. Detta medför att motsvarande dualvariabel försvinner (kan ses som fixerad till noll). LP-dualen blir då två-dimensionell. Rita upp det tillåtna området till denna reducerade dual. Antag att man är lite osäker på koefficienterna i den duala målfunktionen, dvs. de primala högerleden. Vad vet man dock säkert om den primala optimallösningen? Utnyttja grafiken. (3p)

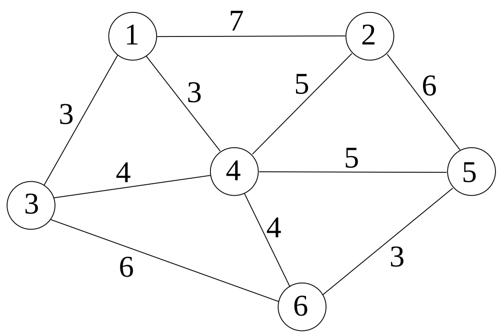
f) I tidigare uppgifter bortsåg vi från att antalet tillverkade produkter måste vara heltal varje dag. Mixomax kör produktion i 24 timmar per dag. Hur kan modellen ovan modifieras så att detta krav säkert uppfylls? (Det räcker inte att detta krav råkar bli uppfyllt, något som kanske hände i uppgift a, utan man måste garantera detta, även om t.ex. vinsten skulle ändras lite.) Dessutom kräver man att Ding 2 endast får produceras om man producerar något (minst en enhet) av Ding 3. Inför detta krav i modellen. (2p)

g) Plötsligt bestämmer man att antalet tillverkade enheter av varje sort *varje timme* måste vara heltal. Tillför detta krav till den givna modellen (utan de ändringar som gjordes i uppgift f), och lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Hur mycket förlorar man på denna begränsning, jämfört med lösningen i uppgift a?

Ledning: Det senast tillagda snittet är alltid aktivt. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Utnyttja resultatet i uppgift a. (3p)

Uppgift 2

Noderna i nedanstående nätverk representerar olika stadsdelar i staden Byköping. Bågarna motsvarar hur ett utryckningsfordon kan ta sig mellan stadsdelarna, och bågkoefficienten anger hur lång tid det tar (i minuter). Alla bågar kan användas i båda riktningarna.



Konsulten OptiKnut har anlitats för att hjälpa till med placeringen av en ny brandstation.

a) OptiKnut tänker sig först att finna en billigaste sammanhängade graf som når alla stadsdelar. (Han tänker sig fasta rutter för brandbilarna.) Finn denna lösning åt honom. Ange metod samt vad problemet kallas. (2p)

b) Efter sammanträde med stadsfullmäktige i Byköping, inser OptiKnut att man inte har löst problemet. Brandbilarna kommer ju att köra snabbaste vägen från brandstationen till aktuell stadsdel, och det är inte den lösningen man får i uppgift a. En politiker tycker att brandstationen ska ligga i centrum, nod 4, eftersom den noden ligger mest centralt. Hjälp OptiKnut att finna de snabbaste vägarna från nod 4 till alla andra. Ange metod samt vad problemet kallas. (Byköping är en ganska liten stad, så problemet är ganska lätt. Man kräver dock att det syns att en effektiv metod som skulle fungera bra på en större stad har använts.) En oppositionspolitiker anser att brandstationen ska ligga i nod 3, eftersom marken i centrum är mycket dyr, och bör användas till affärer. Hjälp OptiKnut att beräkna hur mycket sämre denna lösning skulle bli. Som mått kan man använda summan av utryckningstiden till varje stadsdel. (4p)

c) Man enas om att man inte kan enas om var brandstationen ska ligga, och ber OptiKnut att sätta upp ett optimeringsproblem som finner den bästa lösningen. Brandstationen kan placeras i vilken nod som helst. Man vill dels använda samma mått som i uppgift c, nämligen summan av avstånden från brandstationen till alla andra noder. Låt t_{ij} beteckna den kortaste tiden för att ta sig från nod i till nod j, vilket har beräknats i förväg (med Floyd-Warshalls metod). Detta mått multiplicerar man med faktorn α, som omvandlar tid till pengar. Dessutom adderar man kostnaden för att bygga brandstationen i nod i, f_i. Den därvid uppkomna totalkostnaden skall minimeras. Formulera detta som ett linjärt (blandat) heltalsproblem. Relatera gärna till något välkänt optimeringsproblem. (3p)

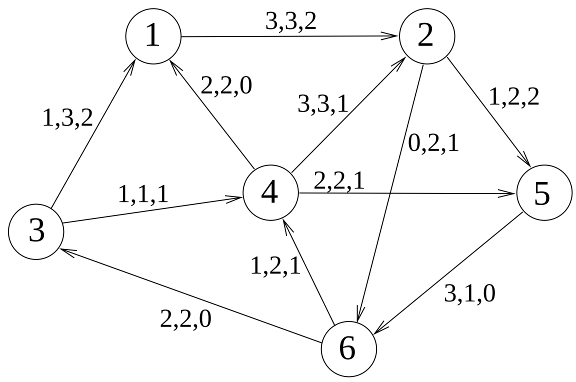
d) Polisen kontaktar OptiKnut och ber honom finna en snabbaste rundtur som ortens enda polisbil kan använda för att besöka samtliga stadsdelar. Vad kallas detta optimeringsproblem? Polisens egen utredare har kommit fram till att man i princip ska köra yttervarvet runt Byköping, men ta någon avstickare in mot centrum. OptiKnut kommer då på att det vore listigt att finna billigaste 1-träd, men med nod 4 som "nod 1". Gör detta. Ger det en användbar tur i detta exempel? Vilken information (relaterad till optimallösningen) ger detta i allmänhet (dvs. för alla möjliga exempel)? (3p)

e) Man vill associera varje länk mellan två stadsdelar med en färg, och vill att två länkar till samma stadsdel inte får ha samma färg. (I en viss nod ska brandbilarna kunna följa instruktioner som "ta röda länken".) Ange en lösning som har få färger. Beskriv hur du tänkte för att hitta lösningen. (1p)

f) På söndag vill ordförande i kommunnämnden professor Åjler ta en promenad där han startar och slutar i sitt hem i nod 5 (kallad gräddhyllan) och passerar varje länk exakt en gång. Går det? Om inte, ungefär hur många länkar får han passera två gånger? Motivera. (2p)

Uppgift 3

Betrakta nedanstående nätverk med följande data på bågarna: kostnad, övre gräns, flöde (i denna ordning). Alla undre gränser är lika med noll.



a) Utgör flödet i grafen en *baslösning* i minkostnadsflödesproblemet att skicka 3 enheter flöde från nod 3 till nod 5 på billigaste sätt? Motivera. (2p)

b) Kan man skicka mer flöde från nod 3 till nod 5? Om svaret är ja, visa hur. Använd en metod. (3p)

c) Kan man skicka de tre enheterna från nod 3 till nod 5 på ett billigare sätt än i den givna startlösningen? (2p)