Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS för D och C

Datum:	14 januari 2014
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	4
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Tomtapå AB tillverkar leksaker som läggs i små julklappspåsar. Påsarna säljs hela, och leksakerna är avsedda att anslutas till USB-porten på en dator. Produktansvarige Nisse A funderar nu på vilka leksaker man ska lägga i en påse. Han bedömer att tre saker, en liten tomte med två blinkande ögon, en liten pipande ren med blinkande röd nos och en liten julgran som spelar julsånger, är mest intressanta.

Tillgången av vissa råvaror till leksakerna är begränsad. Det krävs två lysdioder till varje tomte och en till varje ren. Man får inte använda fler än 5 lysdioder per påse. Renen och julgranen kräver ett litet ljudchip var, och man har bara tillgång till 3 chip per påse. En påse kan innehålla högst fyra (lika eller olika) saker.

Vinsten per enhet är 4 kr för tomten, 1 kr för renen och 2 kr för granen. (Själva påsen ger ingen vinst.)

Problemet att bestämma innehållet i en påse så att vinsten maximeras kan formuleras som ett LP-problem på följande sätt. (Man räknar med att kunna realisera en ev. icke heltalig lösning genom att ändra innehållet då och då.)

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 5 & \quad (1) \\
 & & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & \quad (2) \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 & \quad (3) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimalt påsinnehåll, vinsten per påse samt vilka begräsningar som påverkar lösningen. (3p)

b) Nisse A funderar på att öka vinsten genom att satsa på ett av följande alternativ: skaffa flera lysdioder, skaffa flera ljudchip eller göra påsen lite större. (Antag att ansträngningen per enhets ändring av högerleden är likvärdig.) Vilket verkar vara bäst att satsa på? Vilket verkar vara sämst? (1p)

c) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift a. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

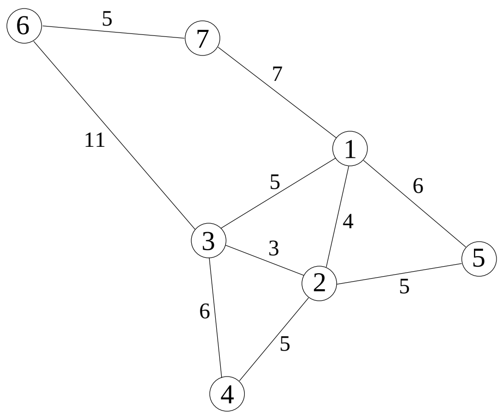
d) En anställd, Nisse B, kommer på att man kan göra en liten snöboll av plast. Den innehåller ingen lysdiod och inget ljudchip, och ger en vinst på 1 kr per enhet, så Nisse B är säker på att man skulle tjäna på att tillverka den och ta med i påsen. (Man får dock fortfarande inte plats med mer än fyra saker i påsen.) Har Nisse B rätt? (Problemet ska inte lösas om från början.) (2p)

e) För att förenkla produktionsplanen bestämmer Nisse A att alla påsar ska ha samma innehåll. Det medför att antalet tillverkade/medtagna leksaker måste vara heltal för varje påse. Tillför detta krav till den givna modellen i uppgift a, och lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Hur mycket förlorar man på denna begränsning, jämfört med lösningen i uppgift a?

Ledning: Det senast tillagda snittet är alltid aktivt. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Utnyttja resultatet i uppgift a. (3p)

Uppgift 2

Det är julaftonskväll och tomten är nästan klar. Han har bara de centrala delarna av Rovaniemi kvar, vilka representeras av nedanstående graf. Tomten är trött och låter ledarrenen Rudolf styra släden.



Rudolf tittar ner på Rovaniemi och tänker att det handlar nog om att besöka varje nod exakt en gång och lämna av julklapparna där. Det är mycket snö, alla renarna är trötta och det är ingen trafik på gatorna, så Rudolf tänker att det är lika bra att följa gatorna (dvs. bågarna i grafen). Målet måste vara att minimera rundturens längd, och den ska start och sluta i nod 1 (tomtens hus). (Rudolf kan inga trafikregler, speciellt vet han inte vad en enkelriktad gata är.) Gatornas längder anges som bågkostnader i grafen.

a) Tala om för Rudolf vad detta är för optimeringsproblem, och hur svårt det är teoretiskt (om Rudolf skulle få för sig att behandla hela världen på detta sätt). Förändras svårighetsgraden om turen får starta och sluta i valfria noder? (1p)

b) Man kan reducera problemet för noder som har valens två. Gör detta så långt det går, och finn en tillåten lösning. (2p)

c) En tillåten lösning ger en övre gräns för det optimala målfunktionsvärdet. För att bevisa optimalitet behöver man undre gränser. Finn en undre gräns genom att finna ett billigaste uppspännande träd i grafen. Jämför gränserna. (2p)

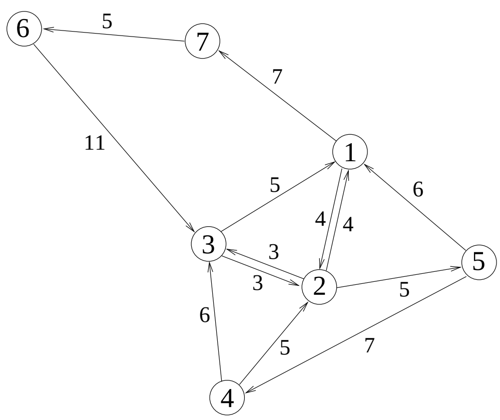
d) Finn en annan undre gräns genom att finna billigaste 1-träd i grafen. Är gränsen bättre än i uppgift c? (1p)

e) Beskriv hur man kan bevisa optimalitet med hjälp av trädsökning. Gör en förgrening för att visa principen, men lös inte färdigt problemet. (3p)

f) Jultomten vaknar till, och talar om för Rudolf att det inte är i noderna klapparna ska delas ut, utan längs bågarna, där husen ligger. (Antag att det finns hus på alla gator.) Uppgiften blir då att trafikera varje gata/båge minst en gång. Målet är fortfarande att få så kort sträcka som möjligt, och man ska fortfarande starta och sluta i nod 1. Vilket optimeringsproblem är det? Finn optimal tur. Problem kan bli olika svårt beroende på en egenskap hos grafen. Vilken egenskap är det? Är detta exempel lätt eller svårt ur den aspekten? (3p)

Uppgift 3

Politikerna i Rovaniemi blir plötsligt inspirerande av Linköpings trafiklösningar, och inför en mängd enkelriktningar. Den riktade grafen nedan beskriver de tillåtna riktningarna (fortfarande med gatulängd som bågkostnader).



a) Finn billigaste väg från tomtens hus (nod 1) till alla andra noder. Ange metod. (3p)

b) Hur många olika vägar finns det från nod 1 till nod 2? (Med "olika" menas att vägarna inte får innehålla någon gemensam båge. Gemensam nod är däremot tillåtet.) Formulera problemet som ett maxflödesproblem och lös med en korrekt metod. (3p)

c) Antag att det ligger fem säckar julklappar i nod 1 och tre säckar i nod 2 och att man vill flytta dem så att man får tre säckar i nod 6, tre i nod 4 och två i nod 5. Kostnaderna för att flytta säckarna är linjära i antalet säckar med angivna bågkoefficienter. Man kan skicka hur mycket som helst i bågarna.

Ett sätt att skicka är tre säckar vägen 1 - 7 - 6, två säckar 1 - 2, fem säckar 2 - 5 och 3 säckar 5 - 4. Antag att man får *vända* på *en* båge, dvs. ändra enkelriktningen på en gata. Vilken båge skulle man tjäna mest på att göra så med? (Ledning: Beakta bara bågar som inte används.) Besvara frågan med hjälp av teorin för simplexmetoden för nätverk. (3p)

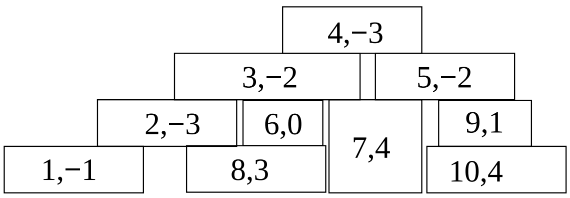
Uppgift 4

Under julgranen ligger ett stor hög julklappar, delvis på varandra. Clark Kent (Stålmannen) har med sin röntgensyn sett vad som är i varje paket, och gjort en egen värdering av innehållet i varje paket. Paket j har värdet c_j för honom. Han har utsatts för kryptonit och dels blivit elak och dels väldigt svag. Svagheten gör att han tycker att det är väldigt tungt att lyfta ett paket. "Kostnaden" för att flytta/ta paket j är d_j, så paket j ger nettovinsten $c_j - d_j$. Elakheten gör att han nu vill stjäla största möjliga värde med minsta möjliga ansträngning (dvs. maximera nettovinsten).

Eftersom paketen ligger på varandra, måste man ibland lyfta paket som man egentligen inte vill ha för att komma åt det man vill ha. (Som vanligt ligger de mest värdefulla klapparna längst ner.) Han stjäl dock alla paket han flyttar. En matris, A, med följande koefficienter är känd: $a_{ij} = 1$ om paket i ligger på paket j, dvs. paket i måste flyttas för att man ska nå paket j. Man kan även spara dessa data som en indexmängd: $I = \{(i, j) : a_{ij} = 1\}$.

a) Formulera optimeringsproblemet som ett linjärt heltalsproblem. (2p)

b) Betrakta det exempel som ges i nedanstående figur, där varje paket har markerats med sitt index och nettovinst, dvs. $(j, c_j - d_j)$. (Exempelvis ger paket 4 kostnaden 3.)



Skriv upp bivillkoren denna hög ger. (Alternativt kan man ange matrisen A.) Ange en enkelt beräknad optimistisk uppskattning, samt en enkelt beräknad pessimistisk uppskattning, av det optimala målfunktionsvärdet. Under vilka förutsättningar bör han ej flytta/ta något paket? (Lös ej problemet.) (2p)

c) Finn en lösning till problemet i uppgift b med en egen heuristik. Beskriv heuristiken. (3p)