Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS för D och C

Datum:	29 maj 2012
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering.*
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Anteckningar får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Företaget MultiMix AB funderar på att börja använda den gamla stansmaskinen som står oanvänd i ett hörn. Man kan göra bokstöd och/eller stekspadar med den. Ett bokstöd ger vinsten 20 kr och en stekspade 10 kr. Ett bokstöd kräver två plastfötter och man kan få fram högst 5 plastfötter per timme. Det tar 20 minuter i stansen att göra ett bokstöd eller en stekspade. En stekspaden innehåller tre specialskruvar, och man har tillgång till högst 7 skruvar per timme.

Problemet att bestämma hur stansen ska användas så att vinsten maximeras kan formuleras som ett optimeringsproblem på följande sätt, där x_1 står för antalet bokstöd man gör per timme och x_2 antalet stekspadar man gör per timme.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 20x_1 & + & 10x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & & & \leq & 5 & (1) \\
& & 20x_1 & + & 20x_2 & \leq & 60 & (2) \\
& & & & 3x_2 & \leq & 7 & (3) \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

En ingenjör påpekar att variablerna bara bör få anta heltaliga värden.

a) Lös heltalsproblemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (Förändringarna i uppgift b får inte användas här.) (3p)

b) En välutbildad ingenjör påpekar att problemformuleringen är onödigt dum. Om man tänker på heltaligheten kan vissa bivillkor skrivas på ett bättre sätt. Gör dessa förändringar i problemet, och avgör hur lösningsgången i uppgift a skulle förändras. Grafisk motivering får användas. (2p)

c) Ange grafiskt det konvexa höljet av de tillåtna heltalspunkterna till uppgift a. (1p)

d) Man bestämmer att det inte är tillåtet att göra både bokstöd och stekspadar, utan produktionen ska vara antingen bokstöd eller stekspadar. Gör nödvändiga omformuleringar (tillägg av bivillkor etc) av modellen för att detta bivillkor ska gälla. (Man ska inte lösa problemet, utan bara formulera modellen.) (2p)

Uppgift 2

Betrakta problemet i uppgift 1. MultiMix bestämmer sig för att strunta i heltalskravet och se vad man kan få fram genom att studera LP-problemet.

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimal lösning samt vilka begränsningar som påverkar lösningen. (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Ange skuggpriserna och förklara vad de betyder. (2p)

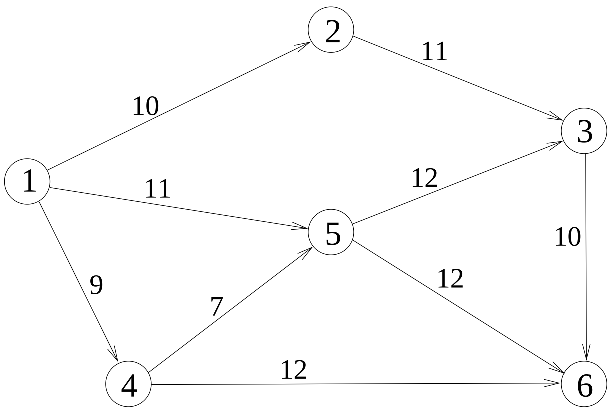
c) Formulera LP-dualen till LP-problemet som löstes i uppgift a. Ange optimal duallösning. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda, och förklara den ekonomiska betydelsen av dem. (3p)

d) En nyanställd kommer på att man kan göra baksidor till mobiltelefoner med stansen. Det tar 28 minuter i stansen att göra en baksida. (Inga plastfötter eller specialskruvar ingår.) En baksida ger vinsten 15 kr. Inför en ny variabel i problemet som möjliggör detta. Verkar denna produkt lönsam att göra? Svara på frågan med hjälp av reducerad kostnad. (Lös ej färdigt, och lös ej om från början.) (1p)

e) Betrakta lösningen i uppgift a. Antag att man skalar om det andra bivillkoret till $x_1 + x_2 \leq 3$. Förändras den primala och/eller den duala optimallösningen, och i så fall hur? (1p)

Uppgift 4

Betrakta det riktade nätverket med bågkostnader nedan.



a) Finn billigaste väg från nod 1 till nod 6 samt billigaste väg från nod 1 till nod 3. (2p)

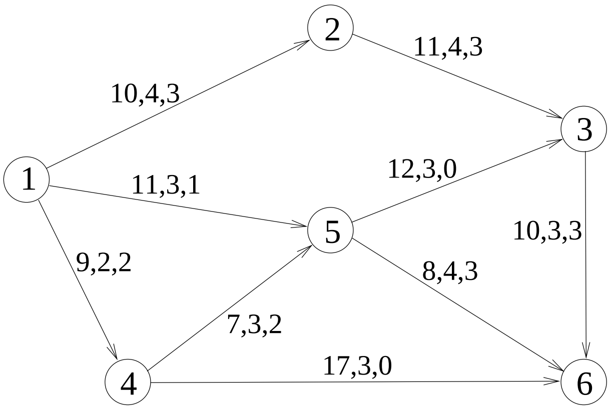
b) Ange en dual lösning (nodpriser) som är optimal för båda vägarna i uppgift a. (1p)

c) Inför en båge från nod 2 till nod 6. Vad får den högst kosta för att billigaste vägen från nod 1 till nod 6 ska gå via den bågen? Använd nodpriser. (1p)

d) Betrakta problemen att finna billigaste väg från nod A till nod B och billigaste väg från nod C till nod D. Ange krav på A, B, C och D för att det säkert ska finnas en gemensam dual optimallösning, samt ett fall då det troligen inte finns en dual lösning som är optimal i båda problemen. (1p)

Uppgift 5

Betrakta det riktade nätverket med bågkostnader, kapaciteter och flöde nedan. (Undre gränser är noll.) Uppgiften är att skicka 6 enheter från nod 1 till nod 6 på billigaste sätt.

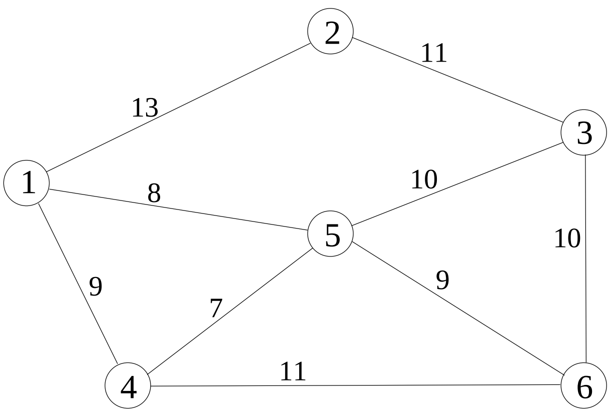


a) Visa med simplex-teknik att lösningen inte är optimal. Välj en inkommande variabel och gör en iteration i simplexmetoden. Avgör om den erhållna lösningen är optimal. (3p)

b) Antag istället att alla bågarna har kapacitet 2. Finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med att skicka två enheter vägen 1 - 2 - 3 - 6 och två enheter vägen 1 - 4 - 5 - 6. Ange ett snitt som skiljer nod 1 från nod 6 som *inte* är ett minsnitt. (3p)

Uppgift 6

Betrakta det oriktade nätverket med bågkostnader nedan.



a) Finn billigaste uppspännande träd. Ange metod, samt totalkostnad. (1p)

b) Finn billigaste 1-träd i grafen. Ange totalkostnad. (1p)

c) Finn en handelsresandetur med valfri heuristik. Ange totalkostnad. (1p)

d) Utnyttja resultaten i uppgift a, b och c och ange gränser för kostnaden för den billigaste handelsresandeturen. (1p)

e) Utgå från lösningen i uppgift b och gör en förgrening som kan användas för att lösa handelsresandeproblemet med trädsökning. Lös ej delproblemen. (2p)

Uppgift 7

a) Betrakta det oriktade nätverket med bågkostnader i uppgift 6. Finn billigaste brevbärartur. Matchningsproblem får lösas med inspektion. (3p)

b) Betrakta det riktade nätverket med bågkostnader i uppgift 4. Beskriv hur man skulle kunna finna billigaste (riktade) brevbärartur i den grafen. (Lös ej problemet.) (2p)