Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS för D och C

Datum:	30 augusti 2013
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering.*
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Anteckningar får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	6
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Familjen Mergård tillverkar färdigmat, och ska nu planera nästa dags produktion. Man har följande produkter: “Lasagna lyx”, “Köttbullar”, “Kålpudding” samt “Lasagne (vanlig)”. Man tror att tillgången till kött kommer att begränsa tillverkningen. För en dags produktion har man tillgång till 2 kg nötkött, 5 kg fläskkött samt 10 kg “annat” kött. Mängden av de olika köttsorterna i en portion av varje rätt är känd, och man sätter upp följande LP-problem för att bestämma hur många portioner man ska tillverka av de olika rätterna, med målet att maximera vinsten.

Produkterna och köttråvarorna kommer i den ordning de nämnts i ovan. Variablerna var först antal portioner, målfunktionen i kronor, och bivillkoren i gram, men därefter förkortade man varje bivillkor med 10 (dvs. dividerade alla bivillkorskoefficienter med 10), samt strök två nollor i högerleden, vilket är samma som att skala om variablerna med 100. Nu anger alltså variablerna hur många hundratal portioner som ska göras, målfunktionen anger vinst i hundralappar och bivillkoren anger antal kg.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\max & z = & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & & \\
\text{då} & & 5x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & \leq & 2 & (1) \\
& & & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 5 & (2) \\
& & & & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 10 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Sätt upp starttablån för att lösa problemet med simplexmetoden. Ange första inkommande och utgående variabel, men gör ingen pivotering. (1p)

b) Efter ett par simplexiterationer fås följande tablå (där x_5, x_6 och x_7 är slackvariabler).

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	10	0	-2	0	3	0	0	6
x_2	0	5	1	0	1	1	0	0	2
x_6	0	-10	0	2	-1	-2	1	0	1
x_7	0	-10	0	1	-1	-2	0	1	6

Ange i klartext (maträtter) vilken lösning denna baslösning motsvarar, inklusive målfunktionsvärde samt vilka bivillkor som är aktiva. Är baslösningen degenererad? Är lösningen optimal? (2p)

c) Starta med simplextablån i uppgift b och lös färdigt problemet med simplexmetoden. Ange i klartext optimallösning, inklusive målfunktionsvärde samt vilka bivillkor som är aktiva. Är optimallösningen unik? (3p)

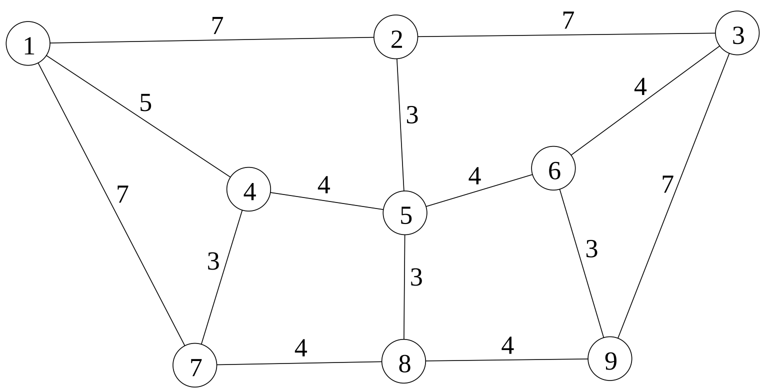
d) Utgå från optimallösningen i uppgift c. Antag att man kan få fram ytterligare 10 gr av en köttråvara. Vilken ska man välja så att vinsten ökas maximalt? (Glöm inte att motivera.) Antag att optimal baslösningen inte ändras. (1p)

e) Pappa Mergård blir förvånad över att det inte blir optimalt att tillverka alla fyra rätterna. Förklara varför man inte ska förvänta sig det i detta LP-problem. (Det är tillåtet att använda termer såsom baslösning m.m.) (1p)

f) Formulera LP-dualen till problemet. Ange den duallösning som uppfyller komplementaritetsvillkoren tillsammans med primallösningen i uppgift b (obs, inte uppgift c). (Ledning: Den kan utläsas i tablån.) Ange det duala målfunktionsvärdet, samt huruvida den duala lösningen är tillåten. Kan man se den duala tillåtenheten direkt (utan beräkningar) på några siffror i tablån? (4p)

Uppgift 2

Nedanstående graf visar de olika datorkluster företaget HejLinkData har köpt in (noderna), samt de möjliga förbindelserna mellan dem (bågarna). Bågkoefficienterna anger kostnaden att konstruera förbindelsen (installation av optisk fiber mm) i tusental kronor.



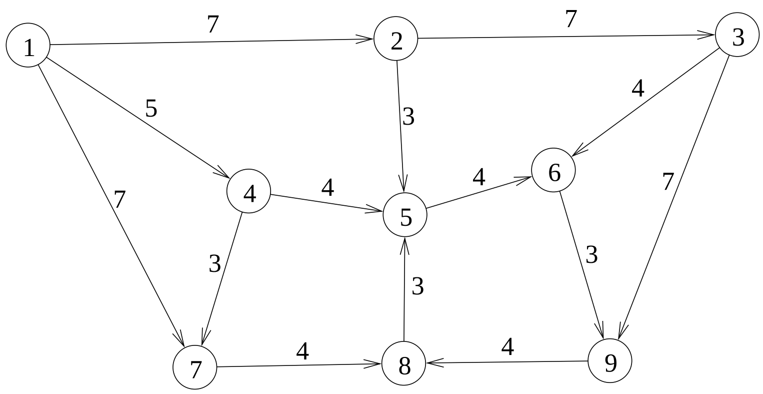
a) HejLink vill koppla ihop datorklustren på billigaste sätt. Enda kravet är att lösningen är sammanhängande, dvs. att varje nod på något sätt kan nås från varje annan nod. Finn den optimala lösningen till detta problem. Vilken grafstruktur har optimallösningen? Ange total kostnad. (2p)

b) HejLink inser att man har glömt vissa säkerhetsaspekter, och vill istället ha en lösning där det finns minst två olika vägar mellan varje par av noder. Man tror att det är en handelsresandetur man vill ha. Uppfyller en handelsresandetur alltid detta krav? Finn en billig handelsresandetur med någon heuristik. Finn en undre gräns till det optimala målfunktionsvärdet genom att finna ett billigaste 1-träd. (Det ger inte en bättre lösning, men ökar förtroendet för den lösning man har.) Ange bästa övre och undre gräns. (3p)

c) Bågarna i ovanstående graf är existerande kabeltrummor. Man vet dock inte i vilket skick de är (några är ganska gamla). Därför vill man undersöka samtliga kabeltrummor med en ganska långsam och liten optisk robot. Man startar i nod 1 och vill skicka ut roboten i en förplanerad rundtur som passerar alla bågar och sedan kommer tillbaka till nod 1. (Antag att tiden en länk tar är proportionell mot bågkoefficienten.) Vilket optimeringsproblem är det att finna den kortaste/snabbaste turen av denna typ? Hur många länkar måste man (minst) köra två gånger i? Ge en motiverad uppskattning av vad rundturen kommer att kosta. (Ledning: Summan av alla bågkostnader är 65.) Fullständig lösning behöver ej anges. (3p)

Uppgift 3

Man vill nu skicka en signal genom nedanstående nätverk, från nod 1 till nod 9. Fördröjningen i varje länk är proportionell mot bågkoefficienten.

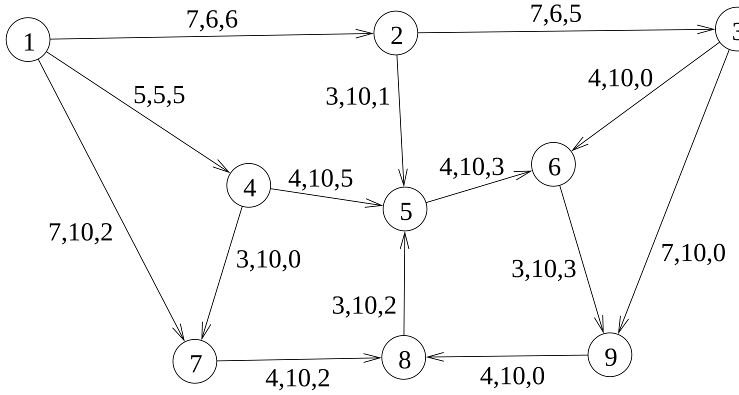


a) Finn en väg med minimal fördröjning (kostnad) från nod 1 till nod 9 med Dijkstras metod. Ange optimal duallösning. (3p)

b) Antag att kostnaden för bågen (8,5) byter tecken (dvs. ändras från 3 till -3). Finn ny optimallösning med lämplig metod. (2p)

Uppgift 4

Innan HejLinkData hinner realisera sina lösningar (från uppgift 2) köps de upp av riskkapitalbolaget TjoHej och får följande uppgift. 13 st optiska fibrer ska dras från nod 1, av dessa ska 5 gå till nod 3, 5 till nod 5 och 3 till nod 9. Av tekniska orsaker kan man bara nyttja varje länk i en given riktning. Kostnaden för en fiber ges av de första bågkoefficienterna i nätverket, och kostnaden ökar linjärt om flera fibrer dras i samma trumma. Den andra bågkoeffecienten anger hur många fibrer som maximalt kan dras i trumman. Man har konsulterat det närbelägna universitetet och fått fram en lösning som minimerar den totala kostnaden. Antalet fibrer i varje trumma ges av den tredje bågkoefficienten.



a) TjoHej upptäcker att HejLink har slarvat. Länken (9,8) kan inte användas åt det givna hållet, utan bara åt andra hållet. Båge (9,8) ska därför ersättas av båge (8,9), med samma kostnad och kapacitet. TjoHej kräver att HejLink snabbt uppdaterar lösningen. Använd simplexmetoden för nätverk för att beräkna en ny optimallösning. (Använd givetvis den givna lösningen som startpunkt.) (3p)

b) Betrakta problemet i uppgift a (med båge (9,8) och inte (8,9)). Nu undrar man hur många fibrer som maximalt kan dras från nod 1 till nod 9. Finn svaret genom att lösa maxflödesproblemet. (Strunta i kostnaderna.) Gör stegen i metoden ordentligt. Ange minsnitt! (3p)

Uppgift 5

Betrakta problemet i uppgift 1. Mergårds köps upp av det multinationella företaget Bristle. Bristles nyinsatta direktör lägger omedelbart ner produktionen av rätterna "Lasagna lyx" och "Köttbullar", samt kräver att produktionen varje dag sker i hela hundratals portioner.

a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. (Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt.) (3p)

b) Rita upp det konvexa höljet till de tillåtna heltalspunkterna. Ange linjära bivillkor som skär bort alla icke heltaliga hörnpunkter. (2p)

Uppgift 6

Betrakta ett tillordningsproblem med fyra personer (rader) som ska göra fyra uppgifter (kolumner). Den optimala duala lösningen ges av $\alpha = (3, 4, 3, 5)$ och $\beta = (2, 0, -3, 1)$, och den primala optimallösningen är att person 1 ska göra uppgift 2, person 2 ska göra uppgift 3, person 3 ska göra uppgift 1 och person 4 ska göra uppgift 4.

a) Vad vet man om de ursprungliga kostnadskoefficienterna c_{11}, c_{12}, c_{31} och c_{41} för att ovanstående skall stämma? (2p)

b) Hitta på en kostnadsmatris som uppfyller alla krav för att den ovan givna primala lösningen ska vara optimal, och lös problemet med ungerska metoden, för att verifiera detta. Är den duala optimallösningen unik? (2p)