Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP33/TEN 2
KOMBINATORISK OPTIMERING GRUNDKURS för D och C

Datum:	17 januari 2014
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering.*
	Kaj Holmberg: *Kombinatorisk optimering med linjärprogrammering.*
	Anteckningar får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	6
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firman Diodaes i Malmslätt producerar lysdioder i tre olika färger, röd, blå och grön. Man ska nu bestämma hur mycket av varje sort man ska göra i morgon. De råvaror som man har begränsad tillgång av är galliumnitrid, kiselkarbid och diamant.

Genom att låta x_1 ange hur många röda lysdioder, x_2 hur många blå och x_3 hur många gröna man ska göra (alla i hundratal), kan man sätta upp följande LP-modell för att maximera vinsten för morgondagen. (Man förutsätter att en icke heltalig lösning går att avrunda utan större fel.) Bivillkor 1 anger begränsad mängd av galliumnitrid, bivillkor 2 begränsad mängd av kiselkarbid och bivillkor 3 begränsad mängd av diamant (alla med sorten 10 kg).

Målfunktionen har sorten 100 kr.

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 5x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & & & + & 5x_3 & \leq & 8 & (1) \\
& & & & 5x_2 & + & x_3 & \leq & 7 & (2) \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 5 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange lösning i klartext. (3p)

b) Betrakta optimallösningen i uppgift a. Man får möjlighet att köpa in ytterligare 1 kg av en av råvarorna. Vilken är mest lönsamt att välja, och hur mycket skulle vinsten öka av det? (Ledning: Optimal baslösning ändras inte av denna ändring.) (1p)

c) Betrakta optimallösningen i uppgift a. Man funderar på att börja göra vita lysdioder, som använder lika mycket av alla tre råvarorna, och därmed får koefficient 1 i alla bivillkor. Hur stor vinst måste varje vit lysdiod ge för att det ska bli lönsamt att tillverka sådana? (1p)

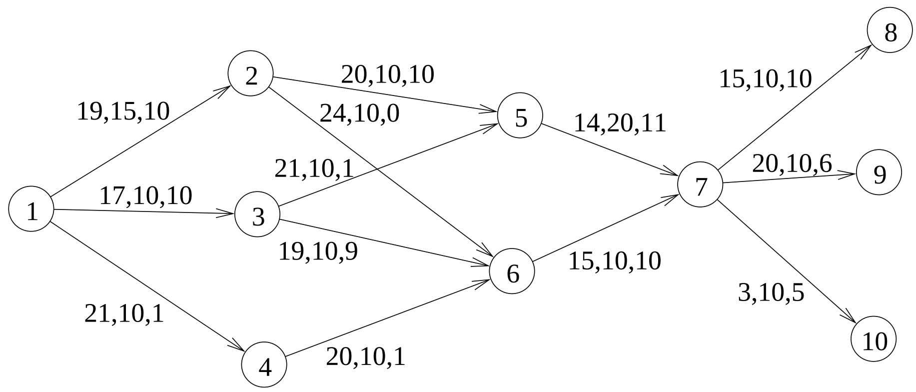
Uppgift 2

Följande nätverk representerar produktionsflödet för vanliga dioder i Diodaes fabrik. Bågarna motsvarar olika maskiner eller processer, och bågkoefficienterna anger i tur och ordning kostnad per enhet (kostnaden antas vara linjär), kapacitet (övre gräns för flödet) samt flödet i en föreslagen lösning. Flödet består av hela askar med 100 dioder i varje.

Råvaran kisel anländer till nod 1. Därefter finns det tre olika förbehandlingsmaskiner, representerade av de tre bågarna till nod 2, 3 och 4. Exempelvis har den tredje maskinen, motsvarande båge (1,4), en kostnadskoefficient på 21 och en kapacitet på 10, samt flöde 1 i den föreslagna lösningen.

Bågarna från noderna 2, 3 och 4 till 5 och 6 motsvarar olika slutbehandlingsmaskiner, och bågarna från 5 och 6 till 7 motsvarar två förpackningsmaskiner. Slutligen representerar bågarna ut från nod 7 transporter till Stockholm (nod 8), Göteborg (nod 9) och Mjärdevi (nod 10).

Man har fått beställningar på 10 askar till Stockholm, 6 askar till Göteborg och 5 till Mjärdevi. Man har därför köpt in material till 21 askar (vilka dyker upp i nod 1).



a) Den föreslagna lösningen är optimallösningen till ett linjärt minkostnadsflödesproblem. Det visar sig dock att kostnaden på båge (2,5) inte ska vara 20, utan 25. Finn med simplexmetoden för nätverk en ny optimallösning till problemet. (3p)

b) Man funderar på att införa en möjlighet till direktleverans från nod 6 till Mjärdevi (nod 10) till en kostnad av 19 per enhet. Skulle detta innebära att totalkostnaden minskar? (Lös ej om.) (1p)

c) Finn det billigaste sättet för en enhet att komma från nod 1 till nod 9 med en passande metod. (2p)

d) Finn det maximala flöde som kan skickas från nod 1 till nod 7. Starta från det angivna flödet i nätverket ovan. (Var tydlig med alla steg i metoden.) Ange minsnitt. (3p)

e) Skulle en ökning av kapaciteten på båge (5,7) ge en ökning av maxflödet? (Motivera utan att göra nya beräkningar.) (1p)

Uppgift 3

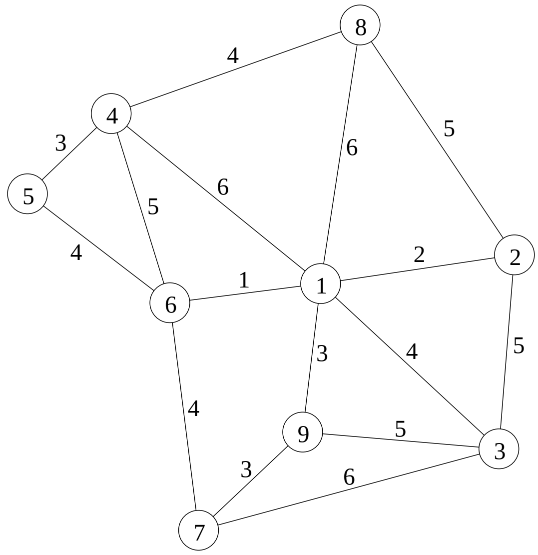
Firma Skeppsis AB har färdigställt åtta större fritidsbåtar, och ska skicka dem med lastbil till Malmö. Båtarna väger 10, 12, 7, 13, 7, 9, 6 och 10 ton. Lastbilarna kan inte ta mer än 20 ton per bil. Den stora frågan är hur många lastbilar som behövs.

a) Finn en lösning med en känd heuristik (dvs. en som finns i kursboken). Bedöm lösningens kvalitet genom att finna en undre gräns för hur många lastbilar som kan behövas. (3p)

b) Gör en matematisk modell för problemet. Var noga med variabeldefinition och ange vad bivillkoren står för. (2p)

Uppgift 4

Malte, säljare för Skeppsis, planerar sin rundtur till potentiella kunder. Han planerar att täcka Östergötland på en dag, och nedanstående graf visar de orter (noder) han vill besöka, samt de vägar (bågar) han kan tänka sig använda. På bågarna står tiden det tar att köra sträckan. (Han har valt bort vissa småorter och vissa småvägar.)



a) Malte vill starta i Mjölby, nod 6, och köra en rundtur som besöker varje ort exakt en gång, och han vill minimera körtiden (för att få mer tid till att prata med kunderna). Ange vilket optimeringsproblem detta är, och finn en skaplig lösning med en känd heuristik. (2p)

b) Malte undrar hur bra lösningen han hittade är. Föreslå en relaxation av problemet ovan, och använd den för att få en optimistisk uppskattning att jämföra med, samt ange hur långt ifrån optimum hans lösning är (i värsta fall). (2p)

c) Göta Spårvägar AB funderar på att bygga upp ett helt nytt smalspårigt spårsystem för pendeltrafik. Man vill förbinda alla orterna i Östergötland som finns med på Maltes karta, och tänker dra spåren längs med existerande vägar. Man använder därför bågarna på hans karta som möjliga spår. Man vill givetvis minimera uppbyggnadskostnaden, som är proportionell mot avståndet mellan orterna, så man använder bågkoefficienterna på Maltes karta. Vilket känt optimeringsproblem är det man vill lösa? Finn en optimallösning med en effektiv metod. (2p)

d) Som förberedelse till uppgift c vill Göta Spårvägar inspektera samtliga möjliga spårdragningar. Man tittar på kartan och försöker hitta en rundtur (som börjar och slutar i Norrköping, nod 2) som passerar varje båge exakt en gång. Kommer man att hitta en sådan tur? Varför (inte)? (1p)

e) Utgå från uppgift d. Man inser att det inte gör så mycket om man passerar en redan inspekterad länk en extra gång, men vill minimera tiden rudturen tar. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en optimal lösning med känd metod. Vilka sträckor måste man köra två gånger? (2p)

f) Utgå från uppgift d. Man kommer på att man behöver inspektera varje båge två gånger. Kan man hitta en rundtur (som börjar och slutar i Norrköping, nod 2) som passerar varje båge exakt två gånger? Varför (inte)? (1p)

Uppgift 5

Betrakta problemet i uppgift 1. Diodaes bestämmer sig för att bara producera lysdioder i hela hundratal. Dessutom bestämmer man sig för att inte tillverka gröna lysdioder, utan bara röda och blå. För övrigt gäller samma modell som i uppgift 1a.

a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. (Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt.) (3p)

b) Rita upp det konvexa höljet till de tillåtna heltalspunkterna. Ange linjära bivillkor som skär bort alla icke heltaliga hörnpunkter. (1p)

Uppgift 6

Fem träbitar ska snidas till fem stycken schackpjäser (en kung, en dam, en häst, en löpare och ett torn). Snidarmästare Fischer ser att de olika bitarna passar olika bra till de olika figurerna. Han uppskattar tidsåtgången till matrisen C, där raderna motsvarar de olika pjäserna och kolumnerna de olika träbitarna. Fischer kommer själv att snida varje pjäs, och han vill minimera den totala tiden.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 & 17 & 11 \\ 11 & 7 & 4 & 19 & 13 \\ 20 & 17 & 12 & 28 & 22 \\ 14 & 11 & 7 & 21 & 16 \\ 16 & 13 & 9 & 24 & 17 \end{pmatrix}$$

a) Finn den bästa tillordningen av träbitar till pjäser med hjälp av den ungerska metoden. (2p)

b) Fischers elev Carlsen tycker att ungerska metoden är för jobbig. Han föreslår istället följande heuristik (som ju påminner om slutfasen av ungerska metoden): Finn ostrukna element i C med minsta kostnad, allokera motsvarande pjäs till motsvarande träbit och stryk raden och kolumnen i C. Upprepa tills en tillåten lösning har erhållits. Använd Carlsens heuristik, och jämför lösningen med den i uppgift a. (2p)

c) Verifiera starka dualsatsen genom att beräkna optimalt målfunktionsvärde för lösningen i uppgift a med hjälp av den duala lösningen. (2p)